Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till Kontrollskrivning 2 den 1/3
5B1133 Amelia 2 för P vt 2004
Version A

1. Beräkna gränsvärdet om det finns, förklara annars varför det inte finns:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy}{x^2+y^2}.$$

Lösning: Om (x, y) går mot origo längs y-axeln fås gränsvärdet

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Om (x, y) går mot origo längs linjen $y = x$ fås gränsvärdet

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{-x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Eftersom vi får olika gränsvärde längs olika kurvor in mot origo så existerar inte gränsvärdet i uppgiften.

---

2. Låt $f(x, y) = \dfrac{4x}{y} + 2xy - 3$. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 2, 3)$.

Lösning: Vi beräknar de partiella derivatorna av funktionen f:
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{4}{y} + 2y$ vilket i den aktuella punkten har värdet 6.
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{4x}{y^2} + 2x$ vilket i den aktuella punkten har värdet 1.
En ekvation för tangentplanet blir därför $z = 3 + 6(x - 1) + (y - 2)$ eller, om man så vill, $6x + y - z - 5 = 0$.

3. Låt $g(x, y) = x^2y + \ln(xy)$. Beräkna g:s riktningsderivata i punkten $(1, 1)$ i riktning mot punkten $(4, 5)$.

Lösning: Vi deriverar och får $\text{grad}g(x, y) = (2xy + \dfrac{1}{x}, x^2 + \dfrac{1}{y})$ vilket i den aktuella punkten betyder $\text{grad}g(1, 1) = (3, 2)$.
Den riktning vi ska derivera i är $(3, 4)$ men först måste den normeras (så att den får längd 1). Vektorn $(3, 4)$ har längd 5, alltså är $(3/5, 4/5)$ en enhetsvektor med samma riktning.
Den sökta riktningsderivatan är nu skalärprodukten $(3, 2) \cdot (3/5, 4/5) = 17/5$.