

Lösningsförslag till Kontrollskrivning 3 den 19/3

5B1133 Amelia 2 för P vt 2004

Version A

1. Avgör om funktionen $f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4e^y \\ x^4 + e^{3y} \end{pmatrix}$ är inverterbar i någon omgivning av punkten $(x, y) = (1, 0)$. Bestäm i så fall inversens Jacobimatrix i punkten $f(1, 0)$ och ge en så bra approximation av inversen som är möjligt med hjälp av denna Jacobimatrix.

Lösning: Vi har att $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 4e^y \\ 4x^3 & 3e^{3y} \end{pmatrix}$ så i den aktuella punkten får vi $J_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Determinanten av den sista matrisen är 2 vilket är skilt ifrån 0 så funktionen är inverterbar i någon omgivning av $(1, 0)$. Inversens Jacobimatrix i punkten $f(1, 0) = (7, 2)$ är då $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ och inversens linjära approximation blir:

$$f^{-1}(u, v) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - 7 \\ v - 2 \end{pmatrix}$$

-
2. Finn alla lokala extrempunkter (och bestäm deras typ) till funktionen $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^2$

Lösning: Funktionen har partiella derivator av alla ordningar för alla x och y , så extrempunkter kan bara finnas där de första ordningens partiella derivatorna båda är noll. Vi deriverar och får $\partial f/\partial x = 6y - 3x^2$ och $\partial f/\partial y = 6x - 2y$. I en eventuell extrempunkt måste alltså

$$\begin{cases} 6y - 3x^2 = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger att $y = 3x$ och sätter man in detta i första ekvationen får man att x måste vara 0 eller 6. De enda punkter där extrempunkter kan finnas är därför $(0, 0)$ och $(6, 18)$. Vi tar fram andra ordningens partiella derivator för att utröna om det är extrempunkter eller inte. Vi får $\partial^2 f / \partial x^2 = -6x$, $\partial^2 f / \partial y^2 = -2$ och $\partial^2 f / \partial x \partial y = 6$. I punkten $(0, 0)$ får vi Hessematrisen $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ med determinant $(AC - B^2) = -36$ som är mindre än noll. Därför är $(0, 0)$ ingen extrempunkt. I punkten $(6, 18)$ får vi Hessematrisen $\begin{pmatrix} -36 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ med determinant $(AC - B^2) = 36$ som är större än noll. Här har vi alltså en extrempunkt och eftersom $\partial^2 f / \partial x^2$ är negativ i punkten så rör det sig om en maxpunkt.

Svar: Funktionen har en extrempunkt nämligen $(6, 18)$ som är en maxpunkt.