Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till Kontrollskrivning 3 den 19/3

5B1133 Amelia 2 för P vt 2004

Version B

1. Avgör om funktionen $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^4 + 2e^y \\ x^5 + e^{3y} \end{pmatrix}$ är inverterbar i någon omgivning av punkten $(x,y) = (1,0)$. Bestäm i så fall inversens Jacobimatris i punkten $f(1,0)$ och ge en så bra approximation av inversen som är möjligt med hjälp av denna Jacobimatris.

Lösning: Vi har att $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 & 2e^y \\ 5x^4 & 3e^{3y} \end{pmatrix}$ så i den aktuella punkten får vi $J_f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Determinanten av den sista matrisen är 2 vilket är skilt ifrån 0 så funktionen är inverterbar i någon omgivning av $(1,0)$. Inversens Jacobimatris i punkten $f(1,0) = (3,2)$ är då $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix}$ och inversens linjära approximation blir:

$$f^{-1}(u,v) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u-3 \\ v-2 \end{pmatrix}$$

---

2. Finn alla lokala extrempunkter (och bestäm deras typ) till funktionen $f(x,y) = x^2 - 6xy + y^3$.

Lösning: Funktionen har partiella derivator av alla ordningar för alla x och y, så extrempunkter kan bara finnas där de första ordningens partiella derivatorna båda är noll. Vi deriverar och får $\partial f/\partial x = 2x - 6y$ och $\partial f/\partial y = -6x + 3y^2$. I en eventuell extrempunkt måste alltså

$$\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ -6x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Den första ekvationen ger att $x = 3y$ och sätter man in detta i den andra ekvationen får man att y måste vara 0 eller 6. De enda punkter där extrempunkter kan finnas är därför $(0, 0)$ och $(18, 6)$. Vi tar fram andra ordningens partiella derivator för att utröna om det är extrempunkter eller inte. Vi får $\partial^2 f/\partial x^2 = 2$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 6y$ och $\partial^2 f/\partial x \partial y = -6$. I punkten $(0, 0)$ får vi Hessematrisen $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ med determinant $(AC - B^2) = -36$ som är mindre än noll. Därför är $(0, 0)$ ingen extrempunkt. I punkten $(18, 6)$ får vi Hessematrisen $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 36 \end{pmatrix}$ med determinant $(AC - B^2) = 36$ som är större än noll. Här har vi alltså en extrempunkt och eftersom $\partial^2 f/\partial x^2$ är positiv i punkten så rör det sig om en minpunkt.

Svar: Funktionen har en extrempunkt nämligen $(18, 6)$ som är en minpunkt.