Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 4 den 27/4 kl 8.15-9.15
5B1133 Amelia 2 för P vt 2004
Version A

1. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (x^2 + y)\, dx + (x + y^2)\, dy$ där γ är den del av enhetscirkeln som löper från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, 1)$.

Lösning: Vi ser att $U(x, y) = (x^3/3+xy+y^3/3)$ är en potentialfunktion i hela planet. Därför blir kurvintegralen lika med $U(0, 1)-U(1, 0) = 0$. (Det går förstås också bra att byta väg, eller att helt enkelt parametrisera enhetscirkeln och räkna. Svaret blir detsamma hur man än gör.)

Svar: 0

---

2. En yta med formen av cirkelskivan $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$ beläggs med ett material vars densitet i punkten (x, y) ges av $\delta(x, y) = 10 - 2x^2 - 2y^2$ kg/kvadratmeter (enheten på koordinataxlarna är meter). Förklara varför beläggningens totala vikt ges av integralen $\iint_D (10 - 2x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$ och räkna sedan ut hur mycket beläggningen väger.

Lösning: Dela in cirkelskivan i små rektanglar, på varje sådan rektangel är då densiteten approximativt konstant, eftersom funktionen är kontinuerlig på den slutna cirkelskivan. Beläggningen på en liten axelparallell rektangel som innehåller punkten (x, y) väger då approximativt $(10-2x^2-2y^2)\Delta x\Delta y$ och hela beläggningens vikt fås genom att summera alla sådana små rektanglars vikt. Detta blir en Riemannsumma och när rektanglarna görs mindre och mindre så att deras yta går mot noll fås integralen i uppgiften. Vi räknar ut den med polär substitution:

$$\iint_D (10-2x^2-2y^2)\,dx\,dy = \{x = r\cos t,\ y = r\sin t, dxdy = rdrdv, 0 \le r \le sqrt2,\ 0 \le v \le 2\pi\}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (10-2r^2)r\,dr\,dv$$
$$= 16\pi.$$

Svar: 16π kg

---

3. Beräkna trippelintegralen $\iiint_K z\,dx\,dy\,dz$, där
$K = \{(x,y,z) :\ 0 \le z \le 1-x-y,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1\}$.

Lösning: Vi använder upprepad enkelintegration och får:

$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} [z^2/2]_0^{1-x-y}\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2/2\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 [-(1-x-y)^3/6]_0^{1-x} dx$$
$$= \int_0^1 (1-x)^3/6 dx$$
$$= [-(1-x)^4/24]_0^1$$
$$= 1/24.$$

Svar: 1/24