

Institutionen för Matematik  
KTH  
Lars Filipsson

**Lösningförslag till**  
**Kontrollskrivning 4 den 27/4 kl 8.15-9.15**  
5B1133 Amelia 2 för P vt 2004  
Version B

1. Beräkna kurvintegralen  $\int_{\gamma} (x^2 y) dx + (xy^2) dy$  där  $\gamma$  är den del av enhetscirkeln som löper från punkten  $(1, 0)$  till punkten  $(0, 1)$ .

Lösning: Parametrisera  $\gamma$  med  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , där  $t$  löper från 0 till  $\pi/2$ .  
Kurvintegralen övergår då i

$$\int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t \sin t + \cos t \sin^2 t \cos t) dt = 0.$$

Svar: 0

- 
2. En yta med formen av cirkelskivan  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$  beläggs med ett material vars densitet i punkten  $(x, y)$  ges av  $\delta(x, y) = 30 - 3x^2 - 3y^2$  kg/kvadratmeter (enheten på koordinataxlarna är meter). Förklara varför beläggningsens totala vikt ges av integralen  $\iint_D (30 - 3x^2 - 3y^2) dx dy$  och räkna sedan ut hur mycket beläggningsen väger.

Lösning: Dela in cirkelskivan i små rektanglar, på varje sådan rektangel är då densiteten approximativt konstant, eftersom densiteten är en kontinuerlig funktion på hela den slutna cirkelskivan. Beläggningsen på en liten axelparallell rektangel som innehåller punkten  $(x, y)$  väger då approximativt  $(30 - 3x^2 - 3y^2)\Delta x \Delta y$  och hela beläggningsens vikt fås genom att summera alla sådana små rektanglars vikt. Detta blir en Riemannsumma och när rektanglarna görs mindre och mindre så att deras yta går mot noll fås integralen i uppgiften. Vi räknar ut den med polär substitution:

$$\begin{aligned}
\iint_D (30 - 3x^2 - 3y^2) dx dy &= \{x = r \cos t, y = r \sin t, dx dy = r dr dv, 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq v \leq 2\pi\} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (30 - 3r^2)r dr dv \\
&= 2\pi(45 - 27/4) \\
&= 153\pi/2.
\end{aligned}$$

Svar:  $153\pi/2$  kg

---

3. Beräkna trippelintegralen  $\iiint_K x dx dy dz$ , där  $K = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1 - y - z, 0 \leq y \leq 1 - z, 0 \leq z \leq 1\}$ .

Lösning: Vi använder upprepad enkelintegration och får:

$$\begin{aligned}
\iiint_K x dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} x dx dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} [x^2/2]_0^{1-y-z} dy dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} (1 - y - z)^2/2 dy dz \\
&= \int_0^1 [-(1 - y - z)^3/6]_0^{1-z} dz \\
&= \int_0^1 (1 - z)^3/6 dz \\
&= [-(1 - z)^4/24]_0^1 \\
&= 1/24.
\end{aligned}$$

Svar:  $1/24$