Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till
Kontrollskrivning 4 den 28/4 kl 14.00-15.00
5B1133 Amelia 2 för P vt 2004

1. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma (3x^2+y^2)\,dx + (2xy)\,dy$ där γ är enhetscirkeln genomlöpt ett helt varv i positiv led med start och slut i punkten $(1,0)$.

Lösning: Vi ser att $U(x,y) = x^3 + xy^2$ är en potentialfunktion i hela planet. Därför blir kurvintegralen lika med $U(1,0) - U(1,0) = 0$. (Det går förstås också bra att kolla att fältet är konservativt genom att visa att $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ eller att helt enkelt parametrisera enhetscirkeln och räkna. Svaret blir detsamma hur man än gör.)

Svar: 0

---

2. Bestäm arean av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, då $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lösning: Arean av $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, ges av $\iint_D \sqrt{1 + (\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2}\,dx\,dy$.
I vårt fall är $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ och D är enhetscirkeln, så vi får att arean är

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy &= \{x = r\cos t,\ y = r\sin t, dxdy = rdrdv, 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2\pi\} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}r\,dr\,dv \\
&= \int_0^{2\pi} [(1+4r^2)^{3/2}/12]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$

---

3. Beräkna trippelintegralen $\iiint_K x^3y^2z\,dx\,dy\,dz$, där $K = \{(x,y,z) :\ 0 \le z \le xy,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$.

Lösning: Vi använder upprepad enkelintegration och får:

$$\begin{aligned}
\iiint_K x^3y^2z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{xy} x^3y^2z\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [x^3y^2z^2/2]_0^{xy}\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x^5y^4/2\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 [x^5y^5/10]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 x^5/10\,dx \\
&= [x^6/60]_0^1 \\
&= 1/60.
\end{aligned}$$

Svar: 1/60