Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Veckans uppgifter på Moment 1

5B1133 Analytiska metoder och linjär algebra 2 för P

Vecka 4

Obs en del av detta är repetition från Amelia 1. Men innan ni ens börjar med uppgifterna här nedan, gå tillbaka och repetera hur man multiplicerar matriser, inverterar matriser och räknar ut determinanter. Dessa operationer kommer man nämligen att behöva göra om och om igen i denna kurs!

Uppgifter i kursboken Linjär geometri och algebra: 3.4, 3.5, 3.11, 3.12, 3.18a, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.30, 3.31, 3.32.

1. Skriv upp, på så många olika sätt du kan, ekvationen för den linje i planet som går genom punkten $(1, 3)$ och är parallell med vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Finn en vektor som är ortogonal mot linjen $2x + 3y = 9$. Finn sedan en vektor som är parallell med samma linje.

3. Finn avståndet från punkten $(1, 1)$ till linjen $2x + 3y = 9$.

4. Finn ekvationen för den linje i rummet som går genom punkten $(1, -11, 3)$ och är parallell med vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

5. Skriv upp, på så många olika sätt du kan, ekvationen för det plan genom punkten $(1, 0, 0)$ som är parallellt med vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $(1, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$ och $(1, 0, 1)$. Beräkna avståndet från punkten $(6, -1, 2)$ till detta plan.

7. Finn en vektor som är ortogonal mot planet $3x + 4711y - z = 5$.

8. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(3, 1, 0)$ och linjen$r(t) = (1 - t, 1 + t, 1 + t)$.

9. Bestäm ekvationen för det plan genom origo som är parallellt med linjerna $r(t) = (1 - t, 1 + t, 1 + t)$. och $r(s) = (s, 1, 2 - 2s)$.

10. Bestäm avståndet från punkten $(1, 1, 3)$ till planet $5x - y + z = 1$.

11. Bestäm minsta avståndet mellan linjerna $r(t) = (t, t, 2 + t)$ och $r(s) = (1 - s, 2s, 0)$.

Här börjar det nya!

Uppgifter från kursboken Linjär geometri och algebra: 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.14, 4.15.

12. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i planet som består i att alla vektorer får x-koordinaten multiplicerad med 3.

13. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i planet som består i att alla vektorer i planet vänds bakochfram, dvs multipliceras med -1. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i rummet som består i att alla vektorer i planet vänds bakochfram, dvs multipliceras med -1.

14. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i planet som består i spegling i linjen $y = -x$.

15. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i planet som består i att alla vektorer först multipliceras med -1 och sedan speglas i linjen $y = -x$.

16. Definiera vad som menas med en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$. Ge exempel på en sådan. Ge exempel på en avbildning som inte är linjär. I matrisen för en linjär avbildning är första kolonnen bilden av första basvektorn, andra kolonnen bilden av andra basvektorn och så vidare - förklara varför det måste vara så.

17. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i planet som består i projektion på linjen $y = 2x$.

18. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i planet som består i att alla vektorer roteras vinkeln $\pi/3$ moturs. Vad blir bilden av punkten $(\sqrt{3}, 1)$ under denna avbildning?

19. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i rummet som består i spegling i planet $x + y = 0$. Vad blir bilden av punkten $(1, 2, 3)$?

20. Om $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning, bevisa följande: Om L är en linje, så är bilden av L under T också en linje.

21. Låt K vara kvadraten med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$. Bestäm arean av bilden av K under den linjära avbildning som ges av multiplikation med matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

22. Låt T vara triangeln med hörn i $(1, 1)$, $(1, 3)$ och $(7, 3)$. Bestäm arean av bilden av T under den linjära avbildningen i föregående uppgift. Lös uppgiften på två sätt, dels genom att räkna ut exakt vad bilden av T blir och räkna ut arean av den, dels genom att använda determinanten som avbildningsskala.

23. Vad blir volymen av bilden av enhetskuben under den linjära avbildning som ges av multiplikation med matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

24. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Beräkna $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Har avbildningen T någon invers? Beräkna i så fall $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

25. Undersök om följande påståenden är sanna för alla linjära avbildningar $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och alla vektorer i planet u och v:
(a) Om u och v är ortogonala så är också $T(u)$ och $T(v)$ ortogonala.
(b) Om u och v inte är ortogonala så är inte heller $T(u)$ och $T(v)$ ortogonala.
(c) Om u och v inte är parallella så är inte heller $T(u)$ och $T(v)$ parallella.
(d) Om u och v är parallella så är också $T(u)$ och $T(v)$ parallella.

26. Bevisa att arean av den ändliga yta som begränsas av ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ är πab. (Tips: Avbilda enhetscirkeln på ellipsen med en linjär avbildning - hur förändras arean?)

Vecka 5

Uppgifter från kursboken Linjär geometri och algebra: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7. Koordinater i uppgifterna nedan är givna i standardbasen om inget annat sägs.

27. Avgör om $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^2$ och skriv om möjligt $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ som en linjärkombination av de båda vektorerna.

28. Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende. Bildar de en bas för rummet?

29. Finn, om möjligt, en vektor u sådan att u tillsammans med vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$.

30. Finn, om möjligt, en vektor v sådan att v tillsammans med vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$.

31. Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$.

32. Är vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ linjärt oberoende? Är de en bas för $\mathbb{R}^4$? Kan de kompletteras till en bas för $\mathbb{R}^4$?

33. Vektorn v har i standardbasen $\{e_1, e_2\}$ koordinaterna $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestäm koordinaterna för v i basen $\{f_1, f_2\}$ som ges av

$$\begin{cases} f_1 = 3e_1 + 2e_2 \\ f_2 = -e_1 + e_2 \end{cases}.$$

34. Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende. Bildar de en bas för $\mathbf{R}^4$?

35. För en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,1) = (3,7)$ och $T(2,1) = (4,10)$. Bestäm $T(1,2)$.

36. Beskriv geometriskt vad det innebär för två vektorer i $\mathbb{R}^n$ att vara linjärt beroende. Samma fråga för tre vektorer.

37. Kan man skriva $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ som en linjärkombination av $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$?

38. Avgör om $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende.

39. Genomför ett koordinatbyte i $\mathbb{R}^2$ från standardbasen $\{e_1, e_2\}$ till den bas $\{f_1, f_2\}$ som ges av

$$\begin{cases} f_1 = 2e_1 + e_2 \\ f_2 = e_1 - e_2 \end{cases} .$$

(a) Bestäm transformationsmatrisen C för koordinatbytet.

(b) Är detta ett byte mellan två ON-baser?

(c) Den punkt som har koordinater $(4, 3)$ i standardbasen - vad får den för koordinater i den nya basen?

(d) Den punkt som har koordinater $(4, 3)$ i basen $\{f_1, f_2\}$ - vad har den för koordinater i standardbasen?

40. Genomför ett koordinatbyte i $\mathbb{R}^3$ från standardbasen $\{e_1, e_2, e_3\}$ till basen $\{f_1, f_2, f_3\}$ given av

$$\begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 \\ f_2 = e_2 + e_3 \\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} .$$

(a) Bestäm transformationsmatrisen C för koordinatbytet.

(b) Är detta ett basbyte mellan två ON-baser?

(c) Den punkt som har koordinater $(1, 2, 3)$ i standardbasen - vad får den för koordinater i basen $\{f_1, f_2, f_3\}$?

(d) Den punkt som har koordinater $(1, 2, 3)$ i basen $\{f_1, f_2, f_3\}$ - vad har den för koordinater i standardbasen?

Vecka 6

Uppgifter från kursboken Linjär geometri och algebra: 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.16, 7.17, 7.18, 7.21 (eventuellt), 8.1, 8.5, 8.6, 8.7, 8.15 (man kanske inte behöver göra alla deluppgifter på dessa).

41. Finn alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

42. Finn alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

43. Finn alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

44. Finn alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

45. Beskriv med egna ord vad det innebär att vara en egenvektor till en matris.

46. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$. Bestäm egenvärden och egenvektorer och byt till en bas som gör matrisen för T diagonal. Vad blir koordinatbytesmatrisen C? Vad blir matrisen för T i den nya basen.

47. Låt $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Bestäm egenvärden och egenvektorer och byt till en bas som gör matrisen för S diagonal. Vad blir koordinatbytesmatrisen C? Vad blir matrisen för T i den nya basen.

48. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Bestäm egenvärden och egenvektorer och byt till en bas som gör matrisen för T diagonal. Vad blir koordinatbytesmatrisen? Vad blir matrisen för T i den nya basen.

49. Finn alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

50. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen i föregående uppgift. Byt bas så att matrisen för T blir diagonal. Hur ska kolonnerna i basbytesmatrisen väljas? Hur ser basbytesmatrisen ut? Hur ser matrisen för T ut i den nya basen? Vad är det för särskilt med talen som står på diagonalen i denna matris?

51. Är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en ON-matris? Om inte, förklara varför och skriv upp en 3×3-matris (skild från enhetsmatrisen) som är en ON-matris.

52. Bestäm matrisen för den linjära avbildning i rummet som består i ortogonal projektion på planet $3x + 4y = 0$

53. Kan du utan att räkna skriva upp tre egenvektorer till avbildningen i föregående uppgift?

54. Beskriv geometriskt vad den linjära avbildning gör som i standardkoordinater ges av matrisen $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

55. Låt C vara den matris som ger koordinatbytet från basen e till basen f i $\mathbb{R}^n$. Om en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i basen e ges av matrisen A, bevisa att samma avbildning i basen f ges av matrisen $C^{-1}AC$.

56. Transformera följande ekvationer till huvudaxelform och avgör vad ekvationerna betyder geometriskt.

(a) $x^2 - xy + y^2 + 4x - 2y = 1$.

(b) $x^2 - 3xy + 5y^2 - 2x + 9/11 = 0$.

(c) $xy + 4x - 8y = 30$.

(d) $25x^2 - 120xy + 144y^2 + 24x + 10y = 0$.

(e) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x + 4y + 2 = 0$.

57. Transformera följande ekvationer till huvudaxelform och avgör vad ekvationerna betyder geometriskt.

(a) $3x^2 + 3y^2 + 4yz = 2$.

(b) $xy - yz + xz = 0$.

(c) $2x^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{4}{3}xz + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 - 2 = 0$.

(d) $9x^2 - 8xy + 8xz + 2y^2 + 16z^2 = 9$.

(e) $9x^2 - 12xy + 12xz + 2y^2 - 4z^2 = 7$.

(f) $4x^2 - 8xy + 4xz + 4y^2 - 4yz + z^2 = 9$.

(De båda sista uppgifterna är tagna från Petermann: Linjär geometri och algebra)