

Facit till Veckans uppgifter på Moment 2

- 1.
2. Se Petermanns bok sid 21 för en liknande uppgift. $D_f = \{(x, y); |(x, y)| \leq 2\}$ och $V_f = [0, 2]$. Nivåkurverna är cirklar och grafen är övre halvan av en sfär.
3. Nivåkurvorna är linjer parallella med x -axeln, $D_f = \mathbf{R}^2$ och $V_f = [0, \infty)$.
4. Nivåkurvorna är linjer parallella med $y = -x$ och grafen är ett plan.
5. M_1 är inte öppen, inte sluten, inte begränsad, inte kompakt, men sammanhängande. Randpunkterna är punkter med x -koordinat 0 och punkter på linjen $y = 1 - x$. M_2 är öppen, begränsade och sammanhängande, inte sluten, inte kompakt. M_3 är en cirkelskiva med radie 2 centrerad i punkten $(1, -2)$, den är sluten och begränsad och därför också kompakt, den är sammanhängande men inte öppen, randpunkterna är cirkeln. M_4 är öppen, sammanhängande och begränsad men inte sluten och inte kompakt. OBS: jag ritar inga bilder här, men ni måste rita alla dessa mängder - viktigt!!!
6. M är varken öppen eller sluten. Rita figur så ser ni randpunkter och inre punkter. Randpunkter: $\{(x, y); y - 2x = 1, x^2 - 3y < 2, 2x + 4y < 5\} \cup \{(x, y); y - 2x < 1, x^2 - 3y = 2, 2x + 4y < 5\} \cup \{(x, y); y - 2x < 1, x^2 - 3y < 2, 2x + 4y = 5\}$. Inre punkter: $\{(x, y); y - 2x < 1, x^2 - 3y < 2, 2x + 4y < 5\}$
7. En linje.
8. $(2, 2)$
9. $r'(t) = (1/\sqrt{2t}, 2t)$ och $r'(2) = (1/2, 4)$.
10. $y = e^x$
11. $(1 + 2t, 2 + 3t)$

12. $-1/2$

13. $\sqrt{2}$

14. 1 – standardgränsvärde från förra kursen!

15.

16. Saknas

17. 0

18. Ja, sätt $f(0, 0) = 0$.

19. $\frac{\partial f}{\partial x} = 7, \frac{\partial f}{\partial y} = 6y, \frac{\partial g}{\partial x} = 7y, \frac{\partial g}{\partial y} = 7x$
 $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2y}}, \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2y}}$.

20. 2, 3, ja, (2 3), ja.

21. En linjär avbildning är sin egen linjarisering!

22. $z = 3 + 2(x - 1) + 8(y - 2)$ eller om man vill flytta om termerna $2x + 8y - z - 15 = 0$.

23. $5x - 2y - z - 1 = 0$

24. $2x - 3y - z + 7 = 0$

25.

26. $11x + 8y + 7z - 21 = 0$

27. $(2, 1, -1)$

28. $(2x, 6y)$

29. Differentierbar (och därmed också kontinuerlig) i alla punkter i hela \mathbb{R}^2 .

30. $(2x, 2y, -2z \sin(z^2 + 1))$

31. Differentierbar (och därmed också kontinuerlig) i alla punkter i \mathbb{R}^3 .

32. a. Ja. b. Nej. c. Ja. d. Nej.

33. $(3, 3)$

34. $21/5$

35. $4/5$

36. I riktning $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

37. I riktning $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

38.

39. $J_f = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 2x_2 & 0 \\ 1/x_1 & 1/x_2 & 1/x_3 \end{pmatrix}$. Den linjära avbildning som bäst approximerar

f i närheten av $(1, 1, 1)$ ges av multiplikation med matrisen $\begin{pmatrix} e & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dvs

$$f(x, y, z) \approx \begin{pmatrix} e+1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

40. $f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y$ och $\frac{\partial g}{\partial y} = x$. $(g \circ f)'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t - 2 \cos t \sin t$

41. $J_F = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $J_G = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$. I punkten $(1, 1, 1)$ blir den första matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ och i punkten $F(1, 1, 1) = (1, 9)$ blir den andra matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 2 & -18 \end{pmatrix}$ så matrisen för $G \circ F$ i $(1, 1, 1)$ fås när man multiplicerar dessa matriser. Man får $\begin{pmatrix} 38 & 56 & 74 \\ -34 & -52 & -70 \end{pmatrix}$.

42. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

43. $f(x, y, z) \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 3 \end{pmatrix}$

44. Matrisen blir $\begin{pmatrix} \cos v & -r \sin v \\ \sin v & r \cos v \end{pmatrix}$ med determinant $= r$ som är skilt från 0 utom när $r = 0$. Matrisen är inverterbar när $r \neq 0$.