KTH Matematik

5B1134 Matematik och modeller
Exempeltentamen

Skrivtid: 8.00-11.00
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare med sifferdisplay och utdelat formelblad
Examinator: Mats Boij

De fyra första uppgifterna betygssätts med U, 3, 4, 5 och den femte uppgiften med U/G. Med godkänt resultat från ett grupparbete kan resultatet från motsvarande kontrollskrivning tillgodoräknas istället för uppgifterns 1-4. Godkända inlämningsuppgifter får tillgodoräknas istället för uppgift 5.

För att uppnå betyg 3 på en av uppgifterna 1-4 krävs minst 6 poäng av 12 möjliga, för betyg 4 krävs minst 8 poäng och för betyg 5 krävs minst 10 poäng. För godkänt på uppgift 5 krävs minst 8 poäng.

För betyg 3 krävs godkänt på uppgift 5 och minst betyg 3 på övriga uppgifter. För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst betyg 4, respektive 5, på uppgift 1-4.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! Presentationen ger upp till 3 poäng på varje uppgift.

1. Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ och $C = (5, 1)$.
   a) Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. **(4)**
   b) Avgör vilken av vinklarna som är störst. **(2)**
   c) Låt C röra sig efter linjen $x = 5$ och bestäm ett villkor på C för att vinkeln B skall vara den största i triangeln. **(3)**

2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen
$$\tan(3\pi x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
(4)
   b) I en triangel är cosinus för två av vinklarna 1/4, respektive 1/2. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln. **(3)**
   c) Om $\cos\alpha = 1/4$ och $\cos\beta = x$, vad är det då för villkor på x för att triangeln har två vinklar som är lika? **(2)**

Låt $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vara den funktion som ges av $f(x) = (2\cos x + 1)^4$, för alla reella tal x.

3. a) Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera f. **(3)**

   b) Bestäm maximum och minimum för funktionen f på intervallet $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. **(4)**

   c) Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till $h = g^n$ då $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ är en given funktion och n är ett positivt heltal. **(2)**

(U,3,4,5)

4. a) Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = 1/2$ på intervallet $[0, 2\pi]$. **(4)**

   b) Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen $g(x) = 1/2$ mot $g(x) = \cos a$, där a är en konstant med $0 \leq a \leq \pi$. **(3)**

   c) Vilka värden på a ger den största, respektive minsta arean mellan graferna? **(2)**

5. En modell för en befolkningstillväxt ger att antalet individer vid tidpunkten t ges av

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-T)}}.$$

   a) Ge en tolkning av parametrarna K och r och T. **(3)**

   b) Uppskatta parametrarna med den befolkning som anges i tabellen nedan. **(4)**

t	P	t	P	t	P	t	P
0	1915	6	3986	12	5930	18	6999
1	2193	7	4349	13	6184	19	7102
2	2543	8	4703	14	6426	20	7187
3	2871	9	5055	15	6608	21	7217
4	3219	10	5387	16	6747	22	7286
5	3609	11	5699	17	6890	23	7338

   c) Verkar modellen stämma med den uppmätta befolkningen? **(2)**