

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1

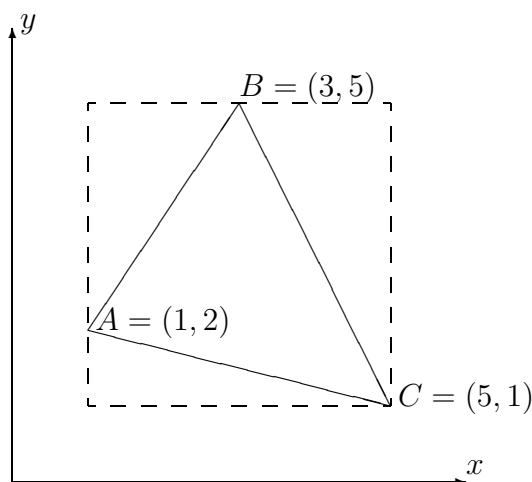
Uppgift

Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$ och $C = (5, 1)$.

- a) Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen. (*Ledning:* För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.) (4)
- b) En av vinklarna är nästan precis 60° . Vilken är det, och är den större eller mindre än 60° ? (2)
- c) Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna $y = kx$ och $y = \ell x$, där $k \geq 0$ och $\ell \geq 0$. (3)

Lösningsförslag

Sidornas längder kan vi få från pythagoras sats genom att rita en rektangel (kvadrat) med sidor parallella med koordinataxlarna där triangelns hörn ligger på kanterna. Vi får på det sättet att

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ |BC| &= \sqrt{(5-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ |AC| &= \sqrt{(5-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

Arean av triangeln kan vi få genom att subtrahera de tre yttre rätvinkliga triangelnas areor från kvadratens area.

$$A = 4^2 - \frac{1}{2}2 \cdot 3 - \frac{1}{2}2 \cdot 4 - \frac{1}{2}4 \cdot 1 = 16 - 3 - 4 - 2 = 7.$$

Med hjälp av areasatsen som säger att

$$A = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \sin \alpha = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \sin \beta = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AC| \sin \gamma$$

får vi nu att

$$\sin \alpha = \frac{2A}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}},$$

$$\sin \beta = \frac{2A}{|AB| \cdot |BC|} = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{20}} = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$$

och

$$\sin \gamma = \frac{2A}{|BC| \cdot |AC|} = \frac{14}{\sqrt{20}\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$$

b) För att avgöra vilket av dessa värden som ligger närmast $\sin(60^\circ)$ kan vi antingen räkna ut närmevärden med miniräknare, eller jämföra med det exakta värdet $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$. För vinklar mellan 0 och 90° växer sinus med vinkeln. Närmevärden ger

$$\sin \alpha \sim 0.94, \quad \sin \beta \sim 0.87 \quad \text{och} \quad \sin \gamma \sim 0.76$$

och enligt tabellen ger det att vinklarna är ungefär 70° , 60° och 50° . Alltså ligger β nära 60° . Vi kan nu jämföra de exakta värdena för $\sin \beta$ och $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$ genom att kvadrera dem eftersom båda är positiva. Vi får

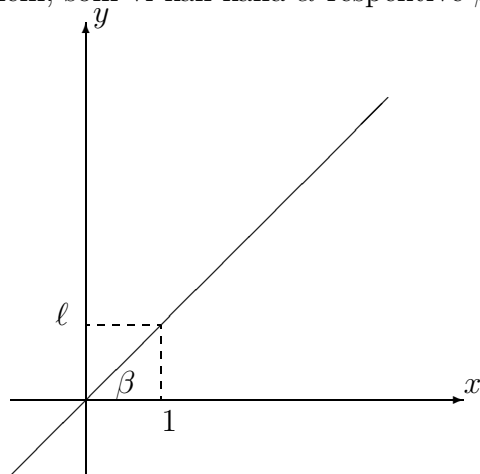
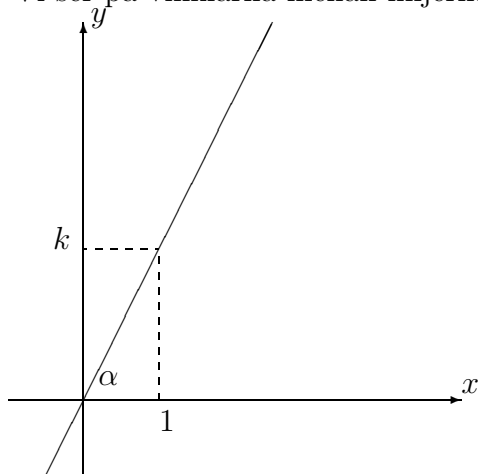
$$(\sin \beta)^2 = \frac{49}{13 \cdot 5} = \frac{49}{65} \quad \text{och} \quad (\sin(60^\circ))^2 = \frac{3}{4}.$$

Vi ser nu att $(\sin \beta)^2 > (\sin(60^\circ))^2$ och därmed också $\sin \beta > \sin(60^\circ)$ eftersom

$$\frac{49}{65} > \frac{3}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{196}{260} > \frac{195}{260}.$$

Eftersom sinus växer med vinkeln mellan 0° och 90° är β större än 60° .

c) Vi ser på vinklarna mellan linjerna och x -axeln, som vi kan kalla α respektive β .



Vi ser på det viset att

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \quad \text{och} \quad \sin \beta = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}.$$

Vinkeln mellan linjerna ges av $\alpha - \beta$, eller $\beta - \alpha$, men enligt subtraktionssatsen är

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\beta - \alpha)$$

och med våra värden blir nu

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}} + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}} = \frac{1+k\ell}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+\ell^2}}$$

Svar: a) $\sin \alpha = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$, $\sin \beta = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$ och $\sin \gamma = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$. b) Vinkeln β ligger nära 60° , men är lite större än 60° . c) Cosinus för vinkeln mellan linjerna ges av $(1+k\ell)/(\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+\ell^2})$.

Bedömningskriterier

- a)
 - Rätt formulering av areasatsen och uttryck för $\sin \alpha$, $\sin \beta$ och $\sin \gamma$, **1 poäng**.
 - Korrekta sidlängder, **1 poäng**.
 - Korrekt värde på sinus för en av vinklarna, **1 poäng**.
 - Korrekt värde på sinus för de två andra vinklarna, **1 poäng**.
 - Om svaren ges med närmevärden i stället för exakta värden ges högst 3 poäng.
 - b)
 - Korrekt motivering för att β är den största vinkel som är närmast 60° , **1 poäng**
 - Korrekt jämförelse mellan vinkeln β och 60° . Observera att det är viktigt att motivera varför ett större värde på sinus betyder en större vinkel. **1 poäng**
 - c)
 - Korrekt bestämning av $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\sin \alpha$ och $\sin \beta$ uttryckta i k och ℓ , **2 poäng**
 - Delpoäng om minst två av dem är korrekta.
 - Korrekt formel för cosinus för vinkeln mellan linjerna **1 poäng**
- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och betygssätts av examinator.