

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2

Uppgift

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$. (4)

- b) Skriv om $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t$ på formen $A \sin(\omega t + \phi)$. (3)

- c) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + c$$

där a , b och c är reella konstanter. (2)

Lösningsförslag

Vi kan börja med att skriva om $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos(\pi/2 - (\omega t + \pi/2)) = \cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$.
Därmed kan ekvationen också skrivas som

$$\cos(100\pi t) = -\frac{1}{2}.$$

Eftersom $\cos x$ antar värdet $-1/2$ för $x = 2\pi/3$ och $x = -2\pi/3$ i intervallet $-\pi < x \leq \pi$ får vi att samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

ges av

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{och} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

där n är ett godtyckligt heltal. Sätter vi in $x = \omega t = 100\pi t$ i dessa får vi

$$100\pi t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{och} \quad 100\pi t = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

vilket kan skrivas som

$$t = \frac{1}{150} + \frac{n}{50} \quad \text{och} \quad t = -\frac{1}{150} + \frac{n}{50}.$$

b) Vi vill försöka skriva $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \phi)$. Om vi använder additions-satsen för sinus får vi att

$$A \sin(\omega t + \phi) = A \sin(\omega t) \cos \phi + A \cos(\omega t) \sin \phi$$

Vi beöver därför ha

$$\begin{cases} A \cos \phi = 5 \\ A \sin \phi = -12 \end{cases}$$

Om vi kvadrerar bägge ekvationerna och lägger ihop får vi

$$A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi = 5^2 + 12^2 = 169$$

som enligt trigonometriska ettan betyder att $A^2 = 169 = 13^2$. Därmed kan vi välja $A = 13$. Sätter vi in detta i ekvationerna igen får vi

$$\begin{cases} \cos \phi = 5/13 \\ \sin \phi = -12/13 \end{cases}$$

och vi får nu $\tan \phi = \sin \phi / \cos \phi = -12/5$. Vi kan se att ϕ ska ligga i fjärde kvadranten eftersom sinus är negativt och cosinus är positivt. Alltså kan vi skriva

$$5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t = 13 \sin(\omega t + \phi)$$

där $\phi = \arctan(-12/5)$ ($\approx -1,107$, enligt tabell.)

c) Vi kan precis som i uppgift b) skriva $a \sin x + b \cos x + c = A \sin(x + \phi) + c$. Med hjälp av additionsformeln får vi igen att

$$A \sin(x + \phi) = A \sin x \cos \phi + A \cos x \sin \phi$$

och vi får då att

$$\begin{cases} A \cos \phi = a \\ A \sin \phi = b \end{cases}$$

vilket på samma sätt som tidigare ger

$$A^2 = a^2 + b^2.$$

Eftersom $\sin(x + \phi)$ varierar mellan $+1$ och -1 kommer $a \sin x + b \cos x + c$ att variera mellan $\sqrt{a^2 + b^2} + c$ och $-\sqrt{a^2 + b^2} + c$.

Svar:

- a) Samtliga lösningar ges av $t = \pm 1/150 + n/50$, där n är ett godtyckligt heltal.
- b) $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t = 13 \sin(\omega t + \phi)$ där $\phi = \arctan(-12/5) \approx -1,107$.
- c) Det största värdet är $c + \sqrt{a^2 + b^2}$ och det minsta är $c - \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bedömningskriterier

- a)
 - En av lösningarna i intervallet $0 \leq 100\pi t \leq 2\pi$, **1 poäng**.
 - Den andra av lösningarna i intervallet $0 \leq 100\pi t \leq 2\pi$, **1 poäng**.
 - Den allmänna lösningen, med godtyckligt n , **2 poäng**.
 - Om svaren ges med närmevärden i stället för exakta värden ges högst 3 poäng.
 - b)
 - Korrekt användning av additionssatsen för att utveckla $A \sin(\omega t + \phi)$, **1 poäng**
 - Korrekt värde på A , **1 poäng**
 - Korrekt värde på ϕ , **1 poäng**
 - Om svaren ges med närmevärden i stället för exakta värden ges högst 2 poäng.
 - c)
 - Korrekt motiverat största värde, **1 poäng**
 - Korrekt motiverat minsta värde, **1 poäng**
- Mindre räknepel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och betygssätts av examinator.