

**5B1134 Matematik och modeller**  
**Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 3**

## Uppgift

Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

- a) Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av  $f(x)$ . Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (3)
- b) Skissera grafen för  $f(x)$  på intervallet  $0 \leq x \leq \pi$  och bestäm maximum och minimum av  $f(x)$  på samma intervall. (4)
- c) Funktionen  $y = f(x)$  är lösningen till en *differentialekvation*

$$y'' + ay' + b = 0.$$

Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$ . (2)

## Lösningsförslag

Deriveringsregeln för en kvot säger att om  $f(x) = g(x)/h(x)$  och  $g(x)$  och  $h(x)$  är deriverbara så är  $f(x)$  deriverbar med derivata

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}.$$

I vårt fall har vi  $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$  och  $h(x) = e^x$ . Eftersom båda dessa är deriverbara med  $g'(x) = \cos(x) + \sin x$  och  $h'(x) = e^x$  får vi

$$f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x)(e^x) - (\sin x - \cos x)(e^x)}{e^{2x}} = \frac{2 \cos x}{e^x} = 2e^{-x} \cos x.$$

b) För att finna maximum och minimum på intervallet undersöker vi intervallets ändpunkter och nollställena hos derivatan  $f'(x)$ . För  $x = 0$  får vi

$$f(0) = (\sin 0 - \cos 0)/e^0 = (0 - 1)/1 = -1.$$

För  $x = \pi$  får vi

$$f(\pi) = (\sin \pi - \cos \pi)/e^\pi = (0 - (-1))e^{-\pi} = e^{-\pi}.$$

Nollställena för derivatan  $f'(x)$  ges enligt a) lösningarna till ekvationen

$$2e^{-x} \cos x = 0$$

Eftersom  $e^{-x}$  aldrig kan vara noll, och  $\cos x = 0$  precis för  $x = \pi/2$  i intervallet  $0 \leq x \leq \pi$  får vi att det enda nollstället vi behöver betrakta är  $x = \pi/2$ . För  $x = \pi/2$  har vi

$$f(\pi/2) = (\sin(\pi/2) - \cos(\pi/2))/e^{\pi/2} = (1 - 0)e^{-\pi/2} = e^{-\pi/2}.$$

Eftersom  $e^{-x}$  är en avtagande funktion är  $e^{-\pi/2} \geq e^{-\pi}$  och därmed är  $e^{-\pi/2}$  funktionens maximum på intervallet. Funktionen minimum ges av  $-1$  eftersom de andra två värdena var positiva. Grafen för funktionen ges av

c) Vi har redan räknat ut  $f'(x)$ , men behöver fortsätta med

$$f''(x) = (2e^{-x} \cos x)' = -2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x = -2e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

Om vi nu sätter in  $y = f(x)$  i  $y'' + ay' + b = 0$  får vi

$$-2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2ae^{-x} \cos x + be^{-x}(\sin x - \cos x) = 0$$

och eftersom  $e^{-x}$  inte kan vara noll kan vi dividera med det och få

$$-2 \cos x - 2 \sin x + 2a \cos x + b \sin x - b \cos x = 0.$$

Om vi samlar ihop sinus och cosinus för sig blir det

$$(b - 2) \sin x + (2a - b - 2) \cos x = 0.$$

Om vi nu sätter in  $x = \pi/2$  får vi att  $b = 2$  och sätter vi in  $x = 0$  får vi  $a = (b + 2)/2 = (2 + 2)/2 = 2$ . Eftersom hela vänsterledet då blir noll är  $f(x)$  en lösning till differentialekvationen  $y'' + 2y' + 2 = 0$ .

**Svar:** a)  $f'(x) = 2e^{-x} \cos x$ . b) Maximum är  $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} \approx 0,21$  och minimum är  $f(0) = -1$ . c) Konstanterna ges av  $a = b = 2$  och  $y = f(x)$  är en lösning till  $y'' + 2y' + 2 = 0$ .

## Bedömningskriterier

- a)
    - Korrekt formulering av kvotregeln, **1 poäng**
    - Korrekt användning av kvotregeln för att derivera  $f(x)$  **1 poäng**
    - Förenklat uttryck för derivatan, **1 poäng**
  - b)
    - Korrekt metod för bestämning av maximum och minimum, **2 poäng**
    - Korrekta och motiverade exakta värden på maximum och minimum, **1 poäng**.
    - Principiellt korrekt skiss av funktionsgrafen, med riktiga lokala maxima och minima och rätt skärningar med axlarna. **1 poäng**
  - c)
    - Korrekt och motiverat värde på  $a$ , **1 poäng**
    - Korrekt och motiverat värde på  $b$ , **1 poäng**
- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag.

## Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

## Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

## Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och betygssätts av examinator.