

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 4

Uppgift

- a) Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \sin 2x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$. (4)
- b) Kurvan $y = x(1-x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x -axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp. (3)
- c) När ett område ovanför x -axeln roteras kring x -axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som $2\pi rA$ där A är arean under grafen som roteras och r är avståndet från områdets tyngdpunkt till x -axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över x -axeln för det område som roteras i b). (2)

Lösningsförslag

a) Vi behöver först skaffa oss en bild av hur graferna för funktionerna ser ut. För $\sin 2x$ är intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$ en halv period, medan det för $\cos x$ är en fjärdedels period.

Arean mellan graferna ges av

$$\int_0^{\pi/2} |f(x) - g(x)| dx$$

och vi måste finna var $f(x) \leq g(x)$, respektive tvärtom. Det finns två skärningspunkter i intervallet och de ges av ekvationen $\sin 2x = \cos x$. Eftersom $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, måste antingen $2 \sin x = 1$, eller $\cos x = 0$. I intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$ händer det då $x = \pi/6$ och $x = \pi/2$.

Alltså får vi att

$$\int_0^{\pi/2} |\sin 2x - \cos x| dx = \int_0^{\pi/6} (\cos x - \sin 2x) dx - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos x - \sin 2x) dx$$

En primitiv funktion till $h(x) = \cos x - \sin 2x$ får vi genom $H(x) = \sin x + 1/2 \cos 2x$ eftersom $H'(x) = \cos x + 1/2(-2 \sin 2x) = \cos x - \sin 2x$ enligt kedjeregeln.

Därmed får vi att arean mellan graferna är

$$\begin{aligned} & \left[\sin x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi/6} - \left[\sin x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \left(\sin \pi/6 + \frac{\cos \pi/3}{2} - \sin 0 - \frac{\cos 0}{2} \right) - \left(\sin \pi/2 + \frac{\cos \pi}{2} - \sin \pi/6 - \frac{\cos \pi/3}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{2} \right) - \left(1 + \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) För att få rotationskroppens volym för kurvan $y = h(x) = x(1-x)$ kan vi använda oss av

$$V = \pi \int_0^1 h(x)^2 dx$$

som i vårt fall ger

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x(1-x))^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(1-2x+x^2) dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \left[\frac{\pi}{3}x^3 - \frac{2\pi}{4}x^4 + \frac{\pi}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{10\pi - 15\pi + 6\pi}{30} = \frac{\pi}{30}. \end{aligned}$$

c) För att kunna använda den givna formeln, $V = 2\pi rA$, för att beräkna r måste vi räkna ut arean av området. Eftersom $x(1-x)$ är positiv på hela intervallet ges arean mellan kurvan och x -axeln av

$$A = \int_0^1 x(1-x) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{0}{3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Om vi nu löser ut r ur den givna formeln får vi avståndet mellan x -axeln och tyngdpunkten till

$$r = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\pi/30}{2\pi/6} = \frac{1}{10}.$$

Svar:

- a) Arean av området mellan graferna är $1/2$.
- b) Rotationskroppens volym är $\pi/30$.
- c) Avståndet från områdets tyngdpunkt till x -axeln är $1/10$.

Bedömningskriterier

- a) – Korrekt uppställd integral, **1 poäng**
 - Korrekt uppdelning av intervallet, **1 poäng**
 - Korrekt primitiv funktion, **1 poäng**
 - Korrekt insättning av gränserna, **1 poäng**
 - b) – Korrekt formel för volymen, **1 poäng**
 - Korrekt primitiv funktion, **1 poäng**
 - Korrekt insättning av gränserna, **1 poäng**
 - c) – Korrekt bestämd area, **1 poäng**
 - Korrekt motiverat avstånd, **1 poäng**
- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag, men uppenbart orimliga svar måste i så fall kommenteras.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och betygssätts av examinator.