KTH Matematik

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till modellkontrollskrivning

Uppgift

Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ och $C = (5, 1)$.

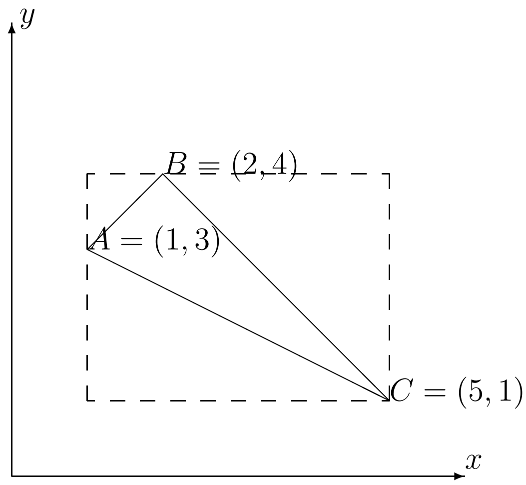
a) Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. **(4)**

b) Avgör vilken av vinklarna som är störst. **(2)**

c) Låt C röra sig efter linjen $x = 5$ och bestäm ett villkor på C för att vinkeln B skall vara den största i triangeln. **(3)**

Lösningsförslag

Vi ritar först en figur



Sidornas längder kan vi få från Pythagoras sats genom att dra rätvinkliga trianglar med kateterna parallella med koordinataxlarna. Vi får på det sättet att

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
|BC| &= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\
|AC| &= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Med hjälp av cosinussatsen får vi nu att

$$\cos\alpha = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB| \cdot |AC|} = \frac{2 + 20 - 18}{2\sqrt{2}\sqrt{20}} = \frac{4}{2\sqrt{40}} = \frac{4}{4\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

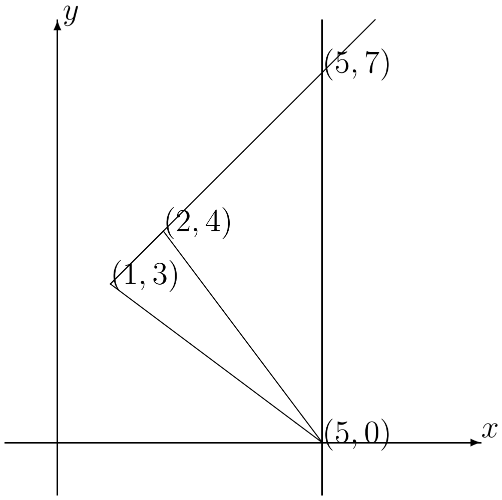
$$\cos\beta = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2|AB| \cdot |BC|} = \frac{2 + 18 - 20}{2\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{0}{2\sqrt{36}} = 0$$

och

$$\cos\gamma = \frac{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}{2|BC| \cdot |AC|} = \frac{18 + 20 - 2}{2\sqrt{18}\sqrt{20}} = \frac{36}{2\sqrt{360}} = \frac{36}{12\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

b) Eftersom $\cos\beta = 0$ är vinkeln vid B rät, dvs $90°$. Summan av de två övriga vinklarna är $180° - 90° = 90°$, så ingen av dem kan vara större än vinkeln vid B.

c) Vinkeln C står allid mot den kortaste sidan, så den kan aldrig vara störst. När C rör sig uppför linjen $x = 5$, dvs då y växer, kommer vinkeln B att bli större och vinkeln A att bli mindre ända tills punkten träffar linjen genom A och B i punkten $(5, 7)$.



Ovanför denna punkt kommer vinkeln B att minska, men den kommer ändå att vara störst, eftersom den är trubbig. Vid en viss punkt kommer vinklarna vid A och B att vara lika stora och triangeln är då likbent. Vi får då att

$$\sqrt{(5-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (y-4)^2}$$

om vi använder Pythagoras sats på rätvinkliga trianglar med kateter parallella med koordinataxlarna. Vi kan lösa ekvationen genom att kvadrera båda sidor eftersom det som står innanför aldrig kan vara negativt. Vi får

$$16 + y^2 - 6y + 9 = 9 + y^2 - 8y + 16$$

vilket kan förenklas till $2y = 0$. Alltså är triangeln likbent om $C = (5, 0)$ och vinkeln B är den största om C ligger ovanför x-axeln.

Svar: a) $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = 0$ och $\cos\gamma = 3/\sqrt{10}$. b) Vinkeln vid B är störst. c) Vinkeln vid B är störst om C ligger ovanför x-axeln.

Bedömningskriterier

a)
- Rätt formulering av cosinussatsen och uttryck för $\cos\alpha$, $\cos\beta$ och $\cos\gamma$, **1 poäng**
- Korrekta sidlängder **1 poäng**
- Korrekt värde på cosinus för en av vinklarna. **1 poäng**
- Korrekt värde på cosinus för de två andra vinklarna. **1 poäng**
- Om svaren ges med närmevärden i stället för exakta värden ges högst 3 poäng.

b)
- Korrekt motivering för att B är den största vinkeln, **2 poäng**
- Delpoäng om motiveringen inte är helt klar.

c)
- Korrekt motiverat att $C < B$. **1 poäng**
- Funnit punkten då vinklarna A och B är lika, **1 poäng**
- Korrekt motiverat att $A < B$ för punkter ovanför denna punkt. **1 poäng**

- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.

3p Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och betygssätts av examinator.