

**Svar till modelltentamen
i 5B1134 Matematik och modeller**

1. Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ och $C = (5, 1)$.

a) Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. (4)

b) Avgör vilken av vinklarna som är störst. (2)

c) Låt C röra sig efter linjen $x = 5$ och bestäm ett villkor på C för att vinkeln B skall vara den största i triangeln. (3)

Svar: a) $\cos \alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos \beta = 0$ och $\cos \gamma = 3/\sqrt{10}$. b) Vinkeln vid B är störst. c) Vinkeln vid B är störst om C ligger ovanför x -axeln.

2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan\left(3\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

b) I en triangel är cosinus för två av vinklarna $1/4$, respektive $1/2$. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln. (3)

c) Om $\cos \alpha = 1/4$ och $\cos \beta = x$, vad är det då för villkor på x för att triangeln har två vinklar som är lika? (2)

Svar:

a) $x = 2/9 + n/3$, där n är ett heltal.

b) Cosinus för den tredje vinkeln är $(3\sqrt{5} - 1)/8$.

c) $x = 1/4$ eller $x = \sqrt{6}/4$.

3. Låt $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vara den funktion som ges av $f(x) = (2 \cos x + 1)^4$, för alla reella tal x .

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera f . (3)

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen f på intervallet $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. (4)

c) Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till $h = g^n$ då $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är en given funktion och n är ett positivt heltal. (2)

(U,3,4,5)

Svar:

- a) $f'(x) = -4 \sin x (\cos x + 1)^3$.
- b) Maximum är 1 och minimum är 0.
- c) Genom att se på nollställena till $g'(x)$ och $g(x)$, samt ändpunkterna på intervallet.
4. a) Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = 1/2$ på intervallet $[0, 2\pi]$. (4)
- b) Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen $g(x) = 1/2$ mot $g(x) = \cos a$, där a är en konstant med $0 \leq a \leq \pi$. (3)
- c) Vilka värden på a ger den största, respektive minsta arean mellan graferna? (2)

Svar:

- a) Arean mellan graferna är $\pi/3 + 2\sqrt{3}$.
- b) Uttrycket för arean är $(2\pi - 4a) \cos a + 4 \sin a$.
- c) Maximum är 2π och minimum är 4.
5. En modell för en befolkningstillväxt ger att antalet individer vid tidpunkten t ges av

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-T)}}.$$

- a) Ge en tolkning av parametrarna K och r och T . (3)
- b) Uppskatta parametrarna med den befolkning som anges i tabellen nedan. (4)

t	P	t	P	t	P	t	P
0	1915	6	3986	12	5930	18	6999
1	2193	7	4349	13	6184	19	7102
2	2543	8	4703	14	6426	20	7187
3	2871	9	5055	15	6608	21	7217
4	3219	10	5387	16	6747	22	7286
5	3609	11	5699	17	6890	23	7338

- c) Verkar modellen stämma med den uppmätta befolkningen? (2)

Svar: a) K är den befolkning som blir på lång sikt, T är tiden då befolkningen är $K/2$ och r är ger den exponentiella tillväxten för t mycket mindre än T .

b) $K \approx 7500$, $T \approx 5,5$ och $r \approx 0,2$.

c) Modellen verkar stämma väl med den uppmätta befolkningen.