

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till tentamen
den 13 oktober 2003

1. a) I en triangel ABC är sidan $c = |AB| = 5,1$ cm och sidan $a = |BC| = 6,7$ cm. Vinkeln vid A är $\alpha = 68^\circ$. Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsetserna. (4)
- b) Två cirklar skär varandra i två punkter som ligger på avstånd $\sqrt{2}$ från varandra. Cirkelns radier är 1 respektive $\sqrt{2}$. Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirkelarna. (5)

Lösning: a) Sinussatsen säger att

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Vi kan ur detta lösa ut $\sin \gamma$ som

$$\sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a} = \frac{5,1 \sin 68^\circ}{6,7} \approx 0,706$$

Enligt tabellen får vi därför att $\gamma \approx 45^\circ$. Eftersom $\sin 180^\circ - x = \sin x$ skulle vi också kunna ha $\gamma \approx 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, men det är omöjligt eftersom $68^\circ + 125^\circ > 180^\circ$. Den tredje vinkeln måste därmed vara $\beta \approx 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 68^\circ - 45^\circ = 67^\circ$. Den sista sidan fås genom

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{6,7 \sin 67^\circ}{0,927} \approx \frac{6,7 \cdot 0,921}{0,927} \approx 6,7$$

b) Vi ritar först en figur:

Vi beräknar areorna av de två cirkelsegment som tillsammans bildar området som ligger i bägge cirkelarna. Öppningsvinkeln i det mindre segmentet är 60° , dvs $\phi = \pi/3$ radianer, eftersom skärningspunkterna bildar en liksidig triangel tillsammans med centrum för den större cirkeln. Alltså är arean av cirkelsektorn

$$\phi \frac{\sqrt{2}^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{\pi}{3}.$$

För att få segmentets area måste vi dra bort arean av den liksidiga triangeln, dvs $1/2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$, och vi får då $\pi/3 - \sqrt{3}/2$.

Det andra segmentet har en öppningsvinkel på $\psi = 90^\circ$, eftersom sidlängderna i triangeln som bildas av skärningspunkterna och centrum för den mindre cirkeln uppfyller Pythagoras sats $\sqrt{2}^2 = 1^2 + 1^2$. Arean av cirkelsektor blir därför

$$\psi \frac{1^2}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}.$$

Vi drar bort triangelns area, dvs $1/2 \cdot 1 \cdot 1 \sin \pi/2 = 1/2$ och får att arean av segmentet är $\pi/4 - 1/2$.

Den efterfrågade arean är summan av areorna av de två segmenten, dvs

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 0,467.$$

Svar:

- a) Den tredje sidan är 6,7 cm och vinklarna är $\beta \approx 67^\circ$ och $\gamma \approx 45^\circ$.
 - b) Arean av området som ligger i bägge cirkelarna är $7\pi/12 - (\sqrt{3}+1)/2 \approx 0,467 \text{ cm}^2$.
2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin 4x = \cos 5x.$$

(3)

- b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4)

- c) Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för $\sin \pi/12$.

(2)

Lösning: a) Vi kan skriva om vänsterledet som $\cos(\pi/2 - 4x)$, och eftersom $\cos a = \cos b$, precis om $a = b + 2\pi n$, eller $a = -b + 2\pi n$, för något heltal n får vi på så sätt att lösningen till

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \cos 5x$$

ges av lösningarna till ekvationerna

$$\frac{\pi}{2} - 4x = 5x + 2\pi n \quad \text{och} \quad \frac{\pi}{2} - 4x = -5x + 2\pi n.$$

Den första av dessa har lösningarna

$$x = \frac{\pi - 4\pi n}{2 \cdot 9} = \frac{\pi(1 - 4n)}{18}$$

och den andra har lösningarna

$$x = \frac{-\pi + 4\pi n}{2} = \frac{\pi(4n - 1)}{2}$$

där n i båda fallen är ett godtyckligt heltal.

b) Vi börjar med att skriva om $\cos x - \sin x$ på formen $A \cos(x + \phi)$. När vi använder additionssatsen på det senare får vi $A \cos x \cos \phi - A \sin x \sin \phi$, och likställer vi dessa uttryck får vi ekvationerna

$$\begin{cases} A \cos \phi = 1, \\ A \sin \phi = 1. \end{cases}$$

Genom att kvadrera och addera dessa två ekvationer får vi $A^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = A^2 = 2$, dvs vi kan välja $A = \sqrt{2}$. Vi får då att $\cos \phi = \sin \phi = 1/\sqrt{2}$, och vi kan välja $\phi = \pi/4$. Alltså kan vi skriva ekvationen som

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

eller

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $\cos a = 1/2$ för $a = \pm\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal får vi

$$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

vilket kan skrivas som

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{(-3 \pm 4)\pi}{12} + 2\pi n.$$

c) Formeln för cosinus av dubbla vinkeln kan vi få från additionssatsen genom

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Enligt trigonometriska ettan kan vi dessutom skriva $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. Om vi nu låter $x = \pi/12$ har vi att $2x = \pi/6$ och vi känner till det exakta värdet för $\cos \pi/6$, nämligen $\sqrt{3}/2$. För att få reda på $\sin \pi/12 = \sin x$ behöver vi lösa ekvationen

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi kan skriva om den som

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

och genom att dra roten ur detta får vi

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

eftersom vi vet att $\sin(\pi/12)$ är positivt.

Svar:

- a) Lösningarna är $x = \pi(1 - 4n)/18$ och $x = \pi(4n - 1)/2$ där n är ett godtyckligt heltal.
- b) Lösningarna är $x = (-3 \pm 4)\pi/12 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal.
- c) Ett exakt värde är $\sin(\pi/12) = (\sqrt{2 - \sqrt{3}})/2$.

3. Betrakta funktionen $f(x) = \sin x + 2\cos^2 x$.

- a) Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. (3)
- b) Bestäm närmevärden till maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ med två gällande siffror. (4)
- c) Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen $f(x)$. (2)

Lösning: a) Kedjeregeln säger att derivatan av en sammansättning av funktioner, $F(x) = h(g(x))$, ges av

$$F'(x) = h'(g(x))g'(x).$$

I vårt fall behöver vi använda kedjeregeln på termen $\cos^2 x$ som är sammansättningen av $h(x) = x^2$ och $g(x) = \cos(x)$. Eftersom derivatan av $h(x)$ är $h'(x) = 2x$ och derivatan av $g(x)$ är $g'(x) = -\sin x$ får vi att derivatan av $\cos^2 x$ är

$$2(\cos x)(-\sin x) = -2\cos x \sin x$$

och derivatan av $f(x)$ blir därmed

$$f'(x) = \cos x + 2(-2\cos x \sin x) = \cos x - 4\cos x \sin x.$$

b) För att finna maximum och minimum på intervallet behöver vi se på intervallets ändpunkter och nollställena till derivatan. (Funktionen har en derivata i alla punkter.) Ändpunkterna är $x = 0$ och $x = 2\pi$ och funktionen antar samma värde i dessa punkter eftersom både sinus och cosinus är periodiska med period 2π . Vi får $f(0) = f(2\pi) = \sin 0 + 2\cos^2 0 = 2$.

Nollställena till derivatan får vi genom att lösa ekvationen $f'(x) = 0$, dvs

$$\cos x - 4 \cos x \sin x = 0.$$

Vi kan faktorisera den som

$$\cos x(1 - 4 \sin x) = 0$$

och ser att vi har lösningar om $\cos x = 0$ eller $1 - 4 \sin x = 0$. Det första händer precis då $x = \pi/2$, eller $x = 3\pi/2$, och vi får i dessa fall att

$$f(\pi/2) = \sin \pi/2 + 2 \cos^2 \pi/2 = 1 + 2 \cdot 0^2 = 1$$

respektive

$$f(3\pi/2) = \sin 3\pi/2 + 2 \cos^2 3\pi/2 = -1 + 2 \cdot 0^2 = -1.$$

Det andra händer då

$$\sin x = 1/4.$$

För att finna närmevärden kan vi se i tabellen att detta inträffar då $x \approx 0,25$. Eftersom $\sin x = \sin(\pi - x)$ händer det också när $x \approx 2,89$. Vi får då

$$f(0,25) = \sin 0,25 + 2 \cos^2 0,25 \approx 0,25 + 2 \cdot 0.97^2 \approx 2,1$$

Eftersom 2,1 är det största av de fyra värdena vi beräknat är det maximum på intervallet. Det minsta värdet av de fyra är -1 , vilket ger minimum av funktionen.

c) Om $\sin x = 1/4$ får vi enligt trigonometriska ettan att

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{16-1}{16} = \frac{15}{16}$$

och därmed är

$$f(x) = \sin x + 2 \cos^2 x = \frac{1}{4} + 2 \frac{15}{16} = \frac{2+15}{8} = \frac{17}{8},$$

vilket ger ett exakt värde för maximum. Minimum är redan angivet exakt i b).

Svar:

- a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = \cos x - 4 \cos x \sin x$.
 - b) Maximum av $f(x)$ är 2,1 och minimum $-1,0$, på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.
 - c) De exakta värdena för maximum och minimum är $17/8$, respektive -1 .
4. a) Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ roterar kring x -axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$. (3)

b) Använd partiell integration för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx. \quad (4)$$

c) Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2} dx$$

med hjälp av variabelbytet $t = 2-x^2$. (Ledning: $2/3x\sqrt{x}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$.) (2)

Lösning: a) Rotationskroppens volym ges av

$$V = \int_0^{1/2} \pi y^2 dx$$

I vårt fall är $y = \sqrt{2-x^2}$, vilket ger

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{1/2} \pi \sqrt{2-x^2}^2 dx = \int_0^{1/2} \pi(2-x^2) dx = \left[\pi 2x - \pi \frac{x^3}{3} \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{3 \cdot 2^3} - (0-0) = \frac{24\pi-\pi}{24} = \frac{23\pi}{24}. \end{aligned}$$

b) Vi börjar med att använda partiell integration en gång och får

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx &= [x^2(-\cos x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x(-\cos x) dx \\ &= (\pi^2(-(-1)) - 0^2(-1)) + \int_0^{\pi} 2x \cos x dx = \pi^2 + \int_0^{\pi} 2x \cos x dx. \end{aligned}$$

Vi använder sedan partiell integration igen på den andra termen och får

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 2x \cos x dx &= [2x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \sin x dx = (0-0) - [2(-\cos x)]_0^{\pi} \\ &= -(2(-(-1)) - 2(-1)) = -4. \end{aligned}$$

Sammanlagt får vi

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 + \int_0^{\pi} 2x \cos x dx = \pi^2 - 4.$$

c) Variabelbytet $t = g(x) = 2-x^2$ ger $dt = g'(x)dx = -2xdx$ och $xdx = -1/2dt$. Vid $x = 0$ har vi $t = g(0) = 2-0^2 = 2$ och vid $x = \sqrt{2}$ har vi $t = g(\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}^2 = 0$. Alltså får vi med variabelbytet att

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2} dx = \int_2^0 \sqrt{t}(-1/2)dt = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\frac{-1}{2} \right]_2^0 = (0 - \frac{2}{3}2\sqrt{2}\frac{-1}{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Svar:

- a) Volymen är $23\pi/24$.
- b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$.
- c) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2} dx = 2\sqrt{2}/3$.
5. En partikel rör sig i ett magnetfält och dess position i x -led antas variera med tiden enligt $x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ för några parametrar a , b och ω . En mätning har gjorts och mätvärdena ges av

t (ms)	x (mm)
0,0	13,1
3,5	25,8
7,0	12,2
10,5	-14,9
14,0	-25,4
17,5	- 8,5
21,0	18,0
24,5	26,8
28,0	6,1
31,5	-20,0

a) Tolka parametrarnas innebörd. (3)

b) Uppskatta parametrarnas värden (6)

Lösning:

a) Till att börja med kan vi konstatera att $f(x)$ är en trigonometrisk funktion med period $2\pi/\omega$, varför ω talar om hur fort partikeln kommer tillbaka till sitt ursprungliga läge i x -led. Eftersom $\sin 0 = 0$ och $\cos 0 = 1$ kommer $x(0) = b$, och deriverar vi $x(t)$ en gång får vi $x'(t) = a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t$, varför $x'(0) = \omega a$. Alltså är b positionen vid $t = 0$ och ωa hastigheten i x -led vid samma tidpunkt.

b) Vi börjar med att försöka hitta nollställena till funktionen som bör ligga med intervall π/ω . Vi ser att $x(t)$ byter tecken mellan $t = 7,0$ och $t = 10,5$. Vi kan approximera funktionen med en rät linje mellan dessa punkter och får då

$$x = 12,2 + (t - 7,0)(-14,9 - 12,2)/(10,5 - 7,0).$$

Denna skär $x = 0$ i $t \approx 7,0 + 1,6 = 8,6$. Vi har också en skärning mellan $t = 28,0$ och $t = 31,5$. På samma sätt får vi en linje

$$x = 6,1 + (t - 28,0)(-20,0 - 6,1)/(31,5 - 28,0)$$

som skär $x = 0$ i $t = 28,0 + 0,8 = 28,8$. Eftersom detta ser ut att vara en hel period efter den första skärningen har vi att $2\pi/\omega \approx 28,8 - 8,6 = 20,2$ ms. Alltså kan vi uppskatta ω till 0,31 kHz.

För att uppskatta b kan vi se på värdet av $x(t)$ i punkten $t = 0$, då $x(0) = b$. Detta ger $b \approx 13$.

För att till sist uppskatta a kan vi använda oss av att amplituden av $x(t)$ ges av $\sqrt{a^2 + b^2}$ och på värdena ser det ut som att amplituden bör vara omkring 27 mm. Alltså kan vi få $a = \sqrt{27^2 - 13^2} \approx 24$.

Svar:

- a) ω talar om hur fort partikeln kommer tillbaka till utgångsläget, genom att perioden är $2\pi/\omega$, $b = x(0)$ är ursprungsläget och $a = x'(0)/\omega$ där $x'(0)$ är ursprungshastigheten.
- b) Vi kan uppskatta parametrarna till $\omega = 0,31$ kHz, $b = 13$ mm och $a = 24$ mm.