KTH Matematik

Lösningsförslag till uppgift 5 på modelltentamen i 5B1134 Matematik och modeller

5 En modell för en befolkningstillväxt ger att antalet individer vid tidpunkten t ges av

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-r(t-T)}}.$$

a) Ge en tolkning av parametrarna K och r och T. **(3)**

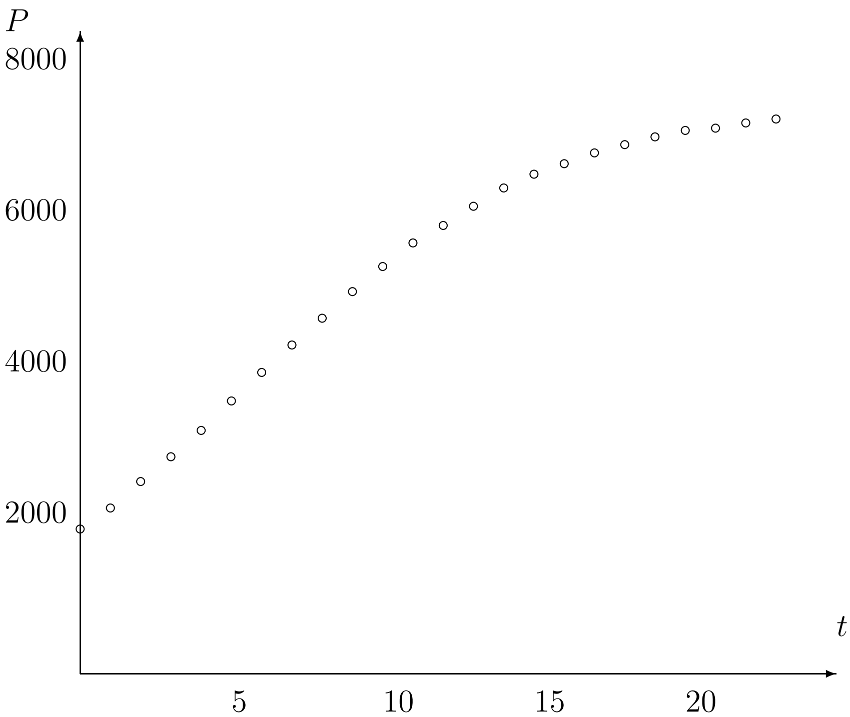
b) Uppskatta parametrarna med den befolkning som anges i tabellen nedan. **(4)**

t	P	t	P	t	P	t	P
0	1915	6	3986	12	5930	18	6999
1	2193	7	4349	13	6184	19	7102
2	2543	8	4703	14	6426	20	7187
3	2871	9	5055	15	6608	21	7217
4	3219	10	5387	16	6747	22	7286
5	3609	11	5699	17	6890	23	7338

c) Verkar modellen stämma med den uppmätta befolkningen? **(2)**

Lösning: a) Vi börjar med att förutsätta att r är positivt. Då kommer $e^{-r(t-T)}$ att bli litet när t växer och $P \approx K$ för stora t. Alltså är K den befolkning som kommer att finnas på sikt. (Om r är negativt kommer det snarare vara den befolkning som en gång har funnits, långt tillbaka i tiden.) För att se vad T betyder sätter vi $t = T$ och ser att vi då får $P(T) = K/(1 + e^0) = K/2$ och därmed måste T vara den tidpunkt då befolkningen är halva gränsbefolkningen. För att förstå vad r är ser vi på det område då $-r(t - T)$ är stort. Då är 1 försumbart i jämförelse, och $P(t) \approx 1/e^{-r(t-T)} = e^{r(t-T)}$. Alltså är r den tillväxhastighet som befolkningen har då den är långt ifrån slutbefolkningen och tillväxten är i stort sett exponentiell.

b) Vi ser från våra data att



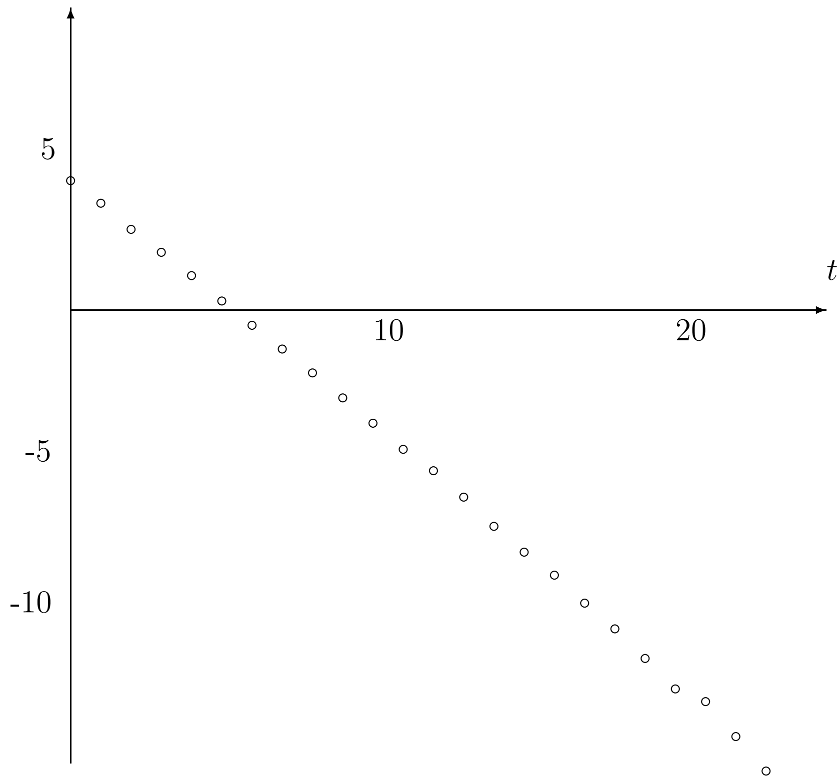
Vi börjar med att uppskatta slutbefolkningen till 7500, eftersom det ser ut att plana ut ganska snabbt mot slutet. Därefter får vi uppskatta tiden T för när befolkningen är hälften av slutbefolkningen och det är någonstans mellan $t = 5$ och $t = 6$, säg $T = 5,5$. Vi kan nu skriva om $P(t) = K/(1 + e^{-r(t-T)})$ som

$$e^{-r(t-T)} = K/P(T) - 1$$

och genom att logaritmera får vi

$$-r(t - T) = \ln(K/P(t) - 1).$$

Vi kan rita ut några värden för $\ln(K/P - 1)$ mot t och får då



Vi kan nu uppskatta lutningen på linjen till c:a $-0,2$, vilket ger $r = 0,2$. Skärningen med t-axeln ser också ut att vara mycket nära $5,5$.

c) Eftersom den graf vi fått fram i slutet av b) liknar en linje väldigt mycket kan vi säga att modellen verkar stämma väl med verkligheten. På slutet ser det möjligen ut att vara något sämre överensstämmelse.

Svar: a) K är den befolkning som blir på lång sikt, T är tiden då befolkningen är $K/2$ och r är ger den exponentiella tillväxten för t mycket mindre än T.

b) $K \approx 7500$, $T \approx 5,5$ och $r \approx 0,2$.

c) Modellen verkar stämma väl med den uppmätta befolkningen.