5B1134 Matematik och modeller
Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

2004-08-25

1 Geometri med trigonometri

Övning 1.1 [5B1134:Modell:1] *Rita upp triangeln ABC med* $A = (1, 3)$*,* $B = (2, 4)$ *och* $C = (5, 1)$.

a) *Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln.* **(4)**

b) *Avgör vilken av vinklarna som är störst.* **(2)**

c) *Låt* C *röra sig efter linjen* $x = 5$ *och bestäm ett villkor på* C *för att vinkeln* B *skall vara den största i triangeln.* **(3)**

Övning 1.2 [5B1134:KS:1:2003] *Rita upp triangeln ABC med* $A = (1, 2)$*,* $B = (3, 5)$ *och* $C = (5, 1)$.

a) *Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen.(*Ledning*: För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.)* **(4)**

b) *En av vinklarna är nästan precis* $60°$*. Vilken är det, och är den större eller mindre än* $60°$*?* **(2)**

c) *Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna $y = kx$ *och* $y = \ell x$*, där* $k \geq 0$ *och* $\ell \geq 0$. **(3)**

Övning 1.3 [5B1134:Tentamen:031013:1]

a) *I en triangel ABC är sidan $c = |AB| = 5,1$ cm och sidan $a = |BC| = 6,7$ cm. Vinkeln vid A är $\alpha = 68°$. Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsatserna.* **(4)**

b) *Två cirklar skär varandra i två punkter som ligger på avstånd $\sqrt{2}$ från varandra. Cirklarnas radier är 1 respektive $\sqrt{2}$. Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirklarna.* **(5)**

Övning 1.4 [5B1134:Tentamen:031103:1]

a) *En triangel har sidlängderna 4 cm, 5 cm och 6 cm. Bestäm samtliga vinklar och arean av triangeln.* **(5)**

b) *Vi får en rundad triangel från en liksidig triangel genom att sätta dit cirkelbågar med centrum i ett av hörnen och som går genom de andra två hörnen. Bestäm förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area?* **(4)**

Övning 1.5 [5B1134:Tentamen:040109:1]

a) *Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 11 cm, 13 cm och 17 cm.* **(4)**

b) *Hur stor del av en cirkels yta utgörs av en regelbunden sexhörning som har sina hörn på cirkelns rand?* **(3)**

c) *Hur lång omkrets har en regelbunden n-hörning i förhållande till den cirkel dess hörn ligger på?* **(2)**

Övning 1.6 [5B1134:Tentamen:040821:1] *I triangeln ABC har sidan AB längd 7, sidan BC längd 5 och $\cos B = 1/7$.*

a) *Bestäm exakta värden för längden av den tredje sidan och cosinus för de båda övriga vinklarna.* **(5)**

b) *Låt S vara centrum för en cirkel med som har alla triangelns hörn på periferin. Vi vet nu att vinkeln ASB är dubbelt så stor som vinkeln C enligt en känd sats. Enligt satsen för cosinus av dubbla vinkeln är $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$. Använd detta för att bestämma cirkelns radie.* **(4)**

2 Trigonometriska funktioner, ekvationer och formler

Övning 2.1 [5B1134:Modell:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\tan(3\pi x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(4)

b) *I en triangel är cosinus för två av vinklarna* $1/4$*, respektive* $1/2$*. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln.* **(3)**

c) *Om* $\cos\alpha = 1/4$ *och* $\cos\beta = x$*, vad är det då för villkor på* x *för att triangeln har två vinklar som är lika?* **(2)**

Övning 2.2 [5B1134:KS:2:2003]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$*.* **(4)**

b) *Skriv om* $5\sin\omega t - 12\cos\omega t$ *på formen* $A\sin(\omega t + \phi)$*.* **(3)**

c) *Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen*

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + c$$

där a*,* b *och* c *är reella konstanter.* **(2)**

Övning 2.3 [5B1134:Tentamen:031013:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin 4x = \cos 5x.$$

(3)

b) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4)

c) *Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för* $\sin \pi/12$. **(2)**

Övning 2.4 [5B1134:Tentamen:031103:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\tan 2x = \sqrt{3}.$$

(3)

b) *För att bestämma extremvärdena för funktionen* $f(x) = \sin 2x \cos x$ *leds man till att finna nollställena till derivatan* $g(x) = f'(x) = 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$. *Förenkla uttrycket för* $g(x)$ *och bestäm alla lösningar till den trigonometriska ekvationen* $g(x) = 0$. **(4)**

c) *Härled formeln*

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

med hjälp av någon av additionsformlerna. **(2)**

Övning 2.5 [5B1134:Tentamen:040109:2]

a) *Skriv om* $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ *på formen* $A\sin(x+\phi)$. **(3)**

b) *Använd resultatet från a) för att bestämma samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

(4)

c) *Härled, med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan, formeln för* $\sin(x/2)$ *uttryckt i* $\cos x$. **(2)**

Övning 2.6 [5B1134:Tentamen:040821:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen* **(4)**

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) *Använd additionsformlerna och trigonometriska ettan för att skriva om* $\sin 3x$ *som ett polynom i* $\sin x$ *och* $\cos 3x$ *som polynom i* $\cos x$. **(5)**

3 Derivator med tillämpningar

Övning 3.1 [5B1134:Modell:3] *Låt* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *vara den funktion som ges av* $f(x) = (2\cos x + 1)^4$*, för alla reella tal* x.

a) *Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera* f. **(3)**

b) *Bestäm maximum och minimum för funktionen* f *på intervallet* $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. **(4)**

c) *Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till* $h = g^n$ *då* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *är en given funktion och* n *är ett positivt heltal.* **(2)**

(U,3,4,5)

Övning 3.2 [5B1134:KS:3:2003] *Betrakta funktionen*

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

a) *Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av* $f(x)$*. Förenkla uttrycket så långt som möjligt.* **(3)**

b) *Skissera grafen för* $f(x)$ *på intervallet* $0 \leq x \leq \pi$ *och bestäm maximum och minimum av* $f(x)$ *på samma intervall.* **(4)**

c) *Funktionen* $y = f(x)$ *är lösningen till en* differentialekvation

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Bestäm konstanterna a *och* b. **(2)**

Övning 3.3 [5B1134:Tentamen:031013:3] *Betrakta funktionen* $f(x) = \sin x + 2\cos^2 x$.

a) *Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen* $f(x)$. **(3)**

b) *Bestäm närmevärden till maximum och minimum för* $f(x)$ *på intervallet* $0 \leq x \leq 2\pi$ *med två gällande siffror.* **(4)**

c) *Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen* $f(x)$. **(2)**

Övning 3.4 [5B1134:Tentamen:031103:3] *Betrakta funktionen* $f(x) = x(3 - x)e^{-x/2}$.

a) *Beräkna derivatan av funktionen* $f(x)$*. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används.* **(4)**

b) *Bestäm maximum och minimum för* $f(x)$ *på intervallet* $0 \leq x \leq 10$ *och skissera grafen för* $f(x)$ *på samma intervall.* **(5)**

Övning 3.5 [5B1134:Tentamen:040109:3] *Betrakta funktionen* $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$.

a) *Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används.* **(4)**

b) *Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall.* **(5)**

Övning 3.6 [5B1134:Tentamen:040821:3]

a) *Derivera funktionen $f(x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x$. (Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används.)* **(2)**

b) *Derivera funktionen $g(x) = \cos 2x \sin 3x$.* **(2)**

c) *Bestäm ett värde på konstanten a så att funktionen $h(x) = e^{ax} \sin^2 x$ får ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$.* **(5)**

4 Integraler med tillämpningar

Övning 4.1 [5B1134:Modell:4]

a) *Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna* $f(x) = \cos x$ *och* $g(x) = 1/2$ *på intervallet* $[0, 2\pi]$. **(4)**

b) *Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen* $g(x) = 1/2$ *mot* $g(x) = \cos a$*, där* a *är en konstant med* $0 \leq a \leq \pi$. **(3)**

c) *Vilka värden på* a *ger den största, respektive minsta arean mellan graferna?* **(2)**

Övning 4.2 [5B1134:KS:4:2003]

a) *Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna* $f(x) = \cos x$ *och* $g(x) = \sin 2x$ *på intervallet* $0 \leq x \leq \pi/2$. **(4)**

b) *Kurvan* $y = x(1 - x)$ *på intervallet* $0 \leq x \leq 1$ *roterar kring* x*-axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp.* **(3)**

c) *När ett område ovanför* x*-axeln roteras kring* x*-axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som* $2\pi r A$ *där* A *är arean under grafen som roteras och* r *är avståndet från områdets tyngdpunkt till* x*-axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över* x*-axeln för det område som roteras i b).* **(2)**

Övning 4.3 [5B1134:Tentamen:031013:4]

a) *Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan* $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ *roterar kring* x*-axeln på intervallet* $0 \leq x \leq 1/2$. **(3)**

b) *Använd partiell integration för att beräkna integralen*

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx.$$

(4)

c) *Beräkna integralen*

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2} dx$$

med hjälp av variabelbytet $t = 2 - x^2$. *(Ledning:* $2/3x\sqrt{x}$ *är en primitiv funktion till* $\sqrt{x}$*.)* **(2)**

Övning 4.4 [5B1134:Tentamen:031103:4]

a) Beräkna integralen

$$\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x|\, dx.$$

(4)

b) Använd först variabelbytet $t = \ln x$ och sedan partiell integration för att beräkna integralen

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$

(5)

Övning 4.5 [5B1134:Tentamen:040109:4]

a) Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{2x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(4)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^\pi x \sin x\, dx$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Använd en trapetsmetoden med fyra delintervall för att få en numerisk approximation av samma integral som i föregående deluppgift. **(2)**

Övning 4.6 [5B1134:Tentamen:040821:4]

a) Beräkna integralen

$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$

där $f(x) = e^x - 1$ för alla reella x. **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^1 (1 - x^2) e^{2x}\, dx$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Låt $g(t)$ vara en periodisk funktion med period T och låt a vara en reell konstant. Visa att

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at} f(t) dt = K \int_0^T e^{at} f(t) dt$$

för någon konstant K och bestäm denna konstant. **(3)**