

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1

Uppgift

En triangulär tomt har måtten 35 m, 48 m och 50 m.

- a) Beräkna närmevärden för vinklarna vid alla tre hörnen med två gällande siffror. **(4)**
- b) Beräkna ett närmevärde med två gällande siffror för tomtens area. **(2)**
- c) En familj som köpt den obebyggda tomten vill söka bygglov för ett hus som är format som en reguljär pentagon, dvs en femhörning där alla sidor är lika långa och alla vinklar är lika stora. Man kan räkna med att få bygglov för ett hus med bottenarea som upptar högst 10 % av tomtarean. Hur långa kan husets väggar i så fall vara? **(3)**

Lösningsförslag

a) Låt hörnen i triangeln vara A , B och C och längderna av motsvående sidor $a = 35$ m, $b = 48$ m respektive $c = 50$ m. Vi använder cosinussatsen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

för att bestämma vinkeln C . Vi kan lösa ut $\cos C$ som

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{35^2 + 48^2 - 50^2}{2 \cdot 35 \cdot 48} = \frac{1029}{3360} \approx 0,306$$

På samma sätt kan vi lösa ut $\cos B$ och $\cos A$ som

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{35^2 + 50^2 - 48^2}{2 \cdot 35 \cdot 50} = \frac{1421}{3500} \approx 0,406$$

och

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{48^2 + 50^2 - 35^2}{2 \cdot 48 \cdot 50} = \frac{3579}{4800} \approx 0,746$$

Vi kan från tabellen för cosinus utläsa att $C \approx 72^\circ$, $B \approx 66^\circ$ och $A \approx 42^\circ$. Vi kan kontrollera att $72^\circ + 66^\circ + 42^\circ = 180^\circ$.

b) Eftersom vi nu känner till vinklarna kan vi använda areasatsen för att bestämma arean, T . Vi får

$$T = \frac{1}{2}ab \sin C \approx \frac{1}{2}(35 \text{ m}) \cdot (48 \text{ m}) \cdot 0,951 \approx 799 \text{ m}^2 \approx 800 \text{ m}^2$$

c) Om vi skriver inför ett centrum, S , i en reguljär pentagon kommer alla hörn att ligga på samma avstånd r från S . Det blir naturligt att dela in pentagonen i fem likadana trianglar där två av sidorna är r och vinkeln mellan dem är $360^\circ/5 = 72^\circ$.

Arean av en sådan triangel är enligt areasatsen

$$\frac{1}{2}r^2 \sin 72^\circ$$

Eftersom husets bottenarea får vara högst $10\% \cdot 800 \text{ m}^2 = 80 \text{ m}^2$ får varje femtedel högst vara 16 m^2 . Därmed får vi

$$\frac{r^2}{2} \sin 72^\circ \leq 16 \text{ m}^2$$

vilket ger

$$r^2 \leq \frac{32 \text{ m}^2}{\sin 72^\circ} \leq \frac{32 \text{ m}^2}{0,95} \leq 33,7 \text{ m}^2$$

Vi kan använda cosinussatsen för att bestämma längden, ℓ , av husets väggar. Vi får

$$\ell^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 72^\circ = (2 - 2 \cos 72^\circ)r^2$$

och

$$\ell^2 \leq (2 - 2 \cdot 0,308) \frac{32 \text{ m}^2}{0,95} \leq 46,7 \text{ m}^2$$

vilket ger $\ell \leq 6,83 \text{ m}$. Det är rimligt att ange svaret med två värdesiffror med tanke på de givna uppgifterna.

Svar:

- a) Vinklarna är $A \approx 42^\circ$, $B \approx 66^\circ$ och $C \approx 72^\circ$.
- b) Tomtens area är 800 m^2 .
- c) Husets väggar kan vara högst $6,8 \text{ m}$.

Alla svar är angivna med två gällande siffrors noggrannhet.

Bedömningskriterier

- a)
 - Korrekt formulering av cosinussatsen, **1 poäng**.
 - Korrekt användning av cosinussatsen för att bestämma en vinkel, **1 poäng**.
 - Korrekt användning av cosinussatsen eller sinussatsen för att bestämma den andra vinkeln, **1 poäng**.
 - Korrekt närmevärde på den tredje vinkeln, **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst 3 poäng om svaren inte är givna med korrekt noggrannhet.
 - b)
 - Korrekt formulering av areasatsen, **1 poäng**
 - Korrekt användning av areasatsen för att bestämma arean, **1 poäng**
 - Sammanlagt högst 1 poäng om svaret inte är givet med korrekt noggrannhet.
 - c)
 - Korrekt metod för att bestämma husets area, **1 poäng**
 - Korrekt villkor på längsta möjliga vägg, **1 poäng**
 - Korrekt värde på längsta möjliga vägg, **1 poäng**
- Mindre räknepfel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inte avdrag.

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.