

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2

Uppgift

- a) Rita upp grafen för funktionen $f(x) = 3,5 \cos(4,4x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi/3$ och bestäm alla lösningar till ekvationen

$$3,5 \cos(4,4x) = 1,2$$

i samma intervall. Ange lösningarna med två värdesiffror. (4)

- b) Hur många lösningar har ekvationen

$$\sin(\omega t + \phi) = 0,242$$

i intervallet $0 \text{ ms} \leq t \leq 94 \text{ ms}$, om $\omega = 3,14 \cdot 10^2$ radianer/s och $\phi = -2\pi/3$? (2)

- b) Man kan skriva om $a \sin(\omega t) + b \sin(\omega t + 2\pi/3)$ på formen $A \sin(\omega t + \phi)$. Bestäm amplituden A uttryckt i a och b . (3)

Lösningsförslag

- a) Amplituden hos funktionen är 3,5 och vinkelhastigheten 4,4. Perioden fås som $T = 2\pi/4,4 \approx 1,43$. Vi har att $2\pi/3 \approx 2,09$ och alltså kommer grafen att se ut som

För att lösa ekvationen ersätter vi $4,4x$ med y och skriver om den som

$$\cos(y) = \frac{1,2}{3,5} (\approx 0,343).$$

Enligt tabellen är $\cos(1,22) = 0,342$, så vi har en lösning vid $y = 1,22$. Eftersom $\cos(y) = \cos(-y)$ får vi en andra lösning vid $y = -1,22$. Detta är de två enda lösningarna inom intervallet $-\pi \leq y \leq \pi$. Resterande lösningar får vi genom periodiciteten som

$$y = \pm 1,22 + 2\pi n,$$

där n är ett heltal.

Eftersom $y = 4,4x$ får vi att lösningarna blir

$$x = \pm \frac{1,22}{4,4} + \frac{2\pi n}{4,4}.$$

För $n = 0$ får vi $x = \pm(1, 22)/(4, 4) \approx \pm 0, 28$. För $n = 1$ får vi $x = 1, 43 \pm 0, 28$, dvs $x = 1, 15 \approx 1, 2$ och $x = 1, 71 \approx 1, 7$. För $n \geq 2$ får vi lösningar som ligger utanför intervallet $0 \leq x \leq 2\pi/3$ och samma sak för negativa n . De enda lösningarna som ligger i intervallet är alltså $x = 0, 28$, $x = 1, 2$ och $x = 1, 7$.

b) Ekvationen måste ha precis två lösningar inom varje period. Enligt tabellen finns en lösning då $\omega t + \phi = 0, 24$, dvs

$$t = (0, 24 - \phi)/\omega \approx (0, 24 + 2, 09)/314 \text{ ms} \approx 7, 4 \text{ ms}.$$

Den andra lösningen inom intervallet fås genom $\pi - (\omega t + \phi) = 0, 24$, dvs

$$t = (\pi - \phi - 0, 24)/\omega \approx (3, 14 + 2, 09 - 0, 24)/314 \text{ ms} \approx 15, 9 \text{ ms}.$$

Perioden är $2\pi/\omega \approx 20$ ms. Från den första lösningen får vi lösningarna $7, 4 + n \cdot 20$ ms. För att detta ska ligga mellan 0 och 94 ms måste $0 \leq n \leq 4$, eftersom $n = 5$ ger $t = 107$ ms. Från den andra lösningen får vi lösningarna $(15, 9 + n \cdot 20)$ ms, och vi får där att $0 \leq n \leq 3$ eftersom $n = 4$ ger $t = 95, 9$ ms. Totalt får vi nio lösningar i intervallet.

c) Om vi utvecklar $A \sin(\omega t + \phi)$ med hjälp av additionssatsen för sinus får vi

$$A \sin(\omega t) \cos \phi + A \cos(\omega t) \sin \phi$$

Vi kan också utveckla $b \sin(\omega t + 2\pi/3)$ på samma sätt och får då

$$b \sin(\omega t + 2\pi/3) = b \sin(\omega t) \cos \frac{2\pi}{3} + b \cos(\omega t) \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{b}{2} \sin(\omega t) + \frac{b\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t).$$

Alltså är

$$a \sin(\omega t) + b \sin(\omega t + 2\pi/3) = \left(a - \frac{b}{2}\right) \sin(\omega t) + \frac{b\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t).$$

För att uppnå att $a \sin(\omega t) + b \sin(\omega t + 2\pi/3) = A \sin(\omega t + \phi)$ kan vi sätta

$$\begin{cases} A \cos \phi &= a - \frac{b}{2} \\ A \sin \phi &= \frac{b\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

På grund av den trigonometriska ettan får vi A^2 genom att kvadrera båda ekvationerna och lägga ihop.

$$A^2 = A^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = a^2 - 2a \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = a^2 - ab + b^2.$$

Alltså är amplituden $A = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Svar:

- a) Lösningarna är $x = 0, 28$, $x = 1, 2$ och $x = 1, 7$.
- b) Det finns nio lösningar till ekvationen i intervallet.
- c) Amplituden är $A = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Bedömningskriterier

- a) – Principiellt korrekt graf med rätt amplitud och rätt skärningar med axlarna, **1 poäng**.
 - Första lösningen, **1 poäng**.
 - Andra lösningen, **1 poäng**.
 - Tredje lösningen, **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst tre poäng om svaren är angivna med fel antal värdesiffror.
 - b) – En korrekt lösning av ekvationen, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverat antal lösningar i intervallet, **1 poäng**.
 - c) – Korrekt användning av additionssatsen för att utveckla $A \sin(\omega t + 2\pi/3)$, **1 poäng**.
 - Korrekt villkor på A och ϕ , **1 poäng**.
 - Korrekt uttryck för A , **1 poäng**.
- Mindre räknepel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inte avdrag.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.