KTH Matematik

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2

Uppgift

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen $g(x) = 2x^3 + 3x + 2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $g(x)$ på samma intervall. Ange svaren exakt. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod med startvärde $x = 0$ för att finna ett närmevärde till den enda reella lösningen till ekvationen

$$x^3 + 3x + 1 = 0.$$

Gör två iterationer och gör en uppskattning av felet. **(2)**

Lösningsförslag

a) Enligt kvotregeln är defivatan av $f(x)/g(x)$ lika med

$$\frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

och i vårt fall har vi $g(x) = \sin^2(x)$ och $h(x) = x^2$. Vi vet att derivatan av polynomet $h(x) = x^2$ är $2x$. Derivatan av $g(x)$ ges enligt produktregeln av

$$g'(x) = (\sin x)'(\sin x) + (\sin x)(\sin x)' = 2\sin x \cos x$$

eller genom kedjeregeln av

$$g'(x) = 2(\sin x)(\sin x)' = 2\sin x \cos x.$$

Alltså får vi att derivatan av $f(x)$ ges av

$$f'(x) = \frac{(2\cos x \sin x)x^2 - \sin^2 x(2x)}{x^4} = \frac{\sin 2x}{x^2} - \frac{2\sin^2 x}{x^3}.$$

b) Vi börjar med att derivera funktionen. Eftersom det är ett polynom ges derivatan av

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 3 + 0 = 3(2x^2 - 1).$$

För att se var vi har lokala extrempunkter tittar vi på nollställena till derivatan. Vi ser att $g'(x) = 0$ innebär att $2x^2 - 1 = 0$, dvs att $x^2 = 1/2$. På intervallet $0 \leq x \leq 1$ finns därför bara lösningen $x = \sqrt{2}/2$.

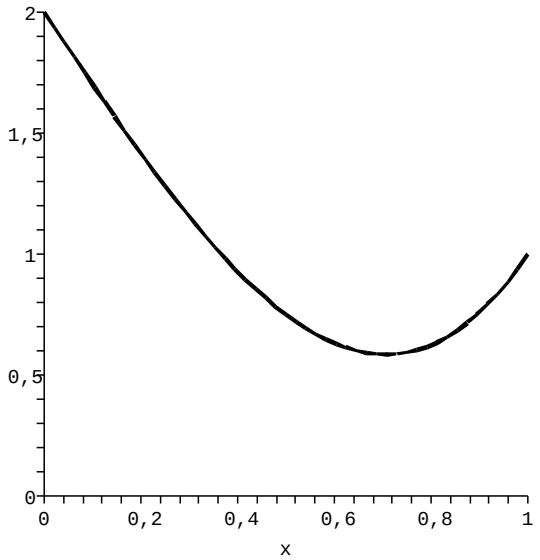
Globala maxima och minima kan alltså bara inträffa i punkterna $x = 0$, $x = \sqrt{2}/2$ eller $x = 1$. Vi jämför värdena i dessa punkter

$$\begin{aligned} g(0) &= 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \\ g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2\frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 - \sqrt{2} \\ g(1) &= 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 2 - 3 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Det största värdet för funktionen är därmed 2 och det minsta $2 - \sqrt{2}$ eftersom $2 - \sqrt{2} < 1$.

Eftersom derivatan är positiv för $0 < x < \sqrt{2}/2$ och negativ för $\sqrt{2}/2 < x < 1$ är funktionen $g(x)$ avtagande från $x = 0$ till $x = \sqrt{2}/2$ och växande från $x = \sqrt{2}/2$ till $x = 1$. Derivatan i $x = 0$ är $g'(0) = 3(2 \cdot 0 - 1) = -3$ och derivatan i $x = 1$ är $g'(1) = 3(2 \cdot 1^2 - 1) = 3$.

Grafen för funktionen kommer därmed se ut som



c) För att använda Newton-Raphsons metod behöver vi först derivatan av funktionen $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Eftersom det är ett polynom ges derivatan av

$$f'(x) = 3x^2 + 3.$$

Första steget i Newton-Raphsons metod ges därmed av

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{3} \approx -0,3333.$$

Nästa steg ges av

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0,3333 - \frac{(-0,3333)^3 + 3 \cdot (-0,3333) + 1}{3 \cdot (-0,3333)^2 + 3} \\ &\approx -0,3333 - (-0,01108) \approx -0,3222. \end{aligned}$$

För att uppskatta felet ser vi på den korrektion som görs i nästa steg av metoden. Där har vi

$$\Delta x = -\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -\frac{(-0,3222)^3 + 3 \cdot (-0,3222) + 1}{3 \cdot (-0,3222)^2 + 3} \approx -0,0000146$$

Alltså är felet av storlek $2 \cdot 10^{-5}$.

Svar:

a) Derivatan är $f'(x) = (\sin 2x)/x^2 - 2(\sin^2 x)/x^3$.

b) Funkionens största värdet är 2 och dess minsta värde är $2 - \sqrt{2}$.

c) Lösningen är $x = -0,3222$ med ett fel av storlek $2 \cdot 10^{-5}$.

Bedömningskriterier

a)
- Korrekt använding av kvotregeln, **1 poäng**.
- Korrekt användning av kedjeregeln eller produktregeln för $\sin^2 x$, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd derivering, **1 poäng**.

b)
- Korrekt derivering av funktionen, **1 poäng**.
- Korrekt bestämning av derivatans nollställen, **1 poäng**.
- Korrekta exakta värden på maximum och minimum, **1 poäng**.
- Principiellt korrekt graf vad gäller växande, avtagande och värden i ändpunkter och minimum, **1 poäng**.

c)
- Korrekt användning av Newton-Raphsons metod, **1 poäng**.
- Korrekt motiverat värde på lösningen med korrekt noggrannhet, **1 poäng**.

- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inte avdrag.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.

3p Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.