

**5B1134 Matematik och modeller**  
**Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 3**

## Uppgift

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen  $g(x) = 2x^3 - 3x + 2$  på intervallet  $0 \leq x \leq 1$  och skissera grafen för  $g(x)$  på samma intervall. Ange svaren exakt. (4)

- c) Använd Newton-Raphsons metod med startvärde  $x = 0$  för att finna ett närmevärde till den enda reella lösningen till ekvationen

$$x^3 + 3x + 1 = 0.$$

Utför två iterationer och gör en uppskattning av felet. (2)

## Lösningsförslag

- a) Enligt kvotregeln är derivatan av  $f(x) = g(x)/h(x)$  lika med

$$\frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

och i vårt fall har vi  $g(x) = \sin^2(x)$  och  $h(x) = x^2$ . Vi vet att derivatan av polynomet  $h(x) = x^2$  är  $2x$ . Derivatan av  $g(x)$  ges enligt produktregeln av

$$g'(x) = (\sin x)'(\sin x) + (\sin x)(\sin x)' = 2 \sin x \cos x$$

eller genom kedjeregeln av

$$g'(x) = 2(\sin x)(\sin x)' = 2 \sin x \cos x.$$

Alltså får vi att derivatan av  $f(x)$  ges av

$$f'(x) = \frac{(2 \cos x \sin x)x^2 - \sin^2 x(2x)}{x^4} = \frac{\sin 2x}{x^2} - \frac{2 \sin^2 x}{x^3}.$$

Egentligen bör man tillägga att funktionen som den står bara är definierad för  $x \neq 0$ , men man kan definiera  $f(0) = 1$ . Derivatan i punkten  $x = 0$  kan då beräknas direkt från definitionen och man får  $f'(0) = 0$ .

b) För att se var vi har lokala extrempunkter tittar vi på nollställena till derivatan och vi börjar därför med att derivera funktionen. Eftersom det är ett polynom ges derivatan av

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 3 = 3(2x^2 - 1).$$

Vi ser att  $g'(x) = 0$  innebär att  $2x^2 - 1 = 0$ , dvs att  $x^2 = 1/2$ . På intervallet  $0 \leq x \leq 1$  finns därför bara lösningen  $x = \sqrt{2}/2$ .

Globala maxima och minima kan alltså bara inträffa i punkterna  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{2}/2$  eller  $x = 1$ . Vi jämför värdena i dessa punkter

$$g(0) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2,$$

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3 \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 \frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$$

och

$$g(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 2 - 3 + 1 = 1.$$

Det största värdet för funktionen är därmed 2 och det minsta  $2 - \sqrt{2}$  eftersom  $2 - \sqrt{2} < 2 - 1 = 1$ .

Eftersom derivatan är positiv för  $0 < x < \sqrt{2}/2$  och negativ för  $\sqrt{2}/2 < x < 1$  är funktionen  $g(x)$  avtagande från  $x = 0$  till  $x = \sqrt{2}/2$  och växande från  $x = \sqrt{2}/2$  till  $x = 1$ . Derivatan i  $x = 0$  är  $g'(0) = 3(2 \cdot 0^2 - 1) = -3$  och derivatan i  $x = 1$  är  $g'(1) = 3(2 \cdot 1^2 - 1) = 3$ .

Grafen för funktionen kommer därmed se ut som

c) För att använda Newton-Raphsons metod behöver vi först derivatan av funktionen  $f(x) = x^3 + 3x + 1$ . Eftersom det är ett polynom ges derivatan av

$$f'(x) = 3x^2 + 3.$$

Första steget i Newton-Raphsons metod ges därmed av

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{1}{3} \approx -0,3333.$$

Nästa steg ges av

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0,33333 - \frac{(-0,33333)^3 + 3 \cdot (-0,33333) + 1}{3 \cdot (-0,33333)^2 + 3} \\ &\approx -0,33333 - (-0,01111) \approx -0,32222. \end{aligned}$$

För att uppskatta felet ser vi på den korrektion som görs i nästa steg av metoden. Där har vi

$$\Delta x = -\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -\frac{(-0,32222)^3 + 3 \cdot (-0,32222) + 1}{3 \cdot (-0,32222)^2 + 3} \approx -0,000037$$

Alltså är felet av storlek  $4 \cdot 10^{-5}$ .

**Svar:**

- a) Derivatan är  $f'(x) = (\sin 2x)/x^2 - 2(\sin^2 x)/x^3$ .
- b) Funktionens största värdet är 2 och dess minsta värde är  $2 - \sqrt{2}$ .
- c) Lösningen är  $x = -0,32222$  med ett fel av storlek  $4 \cdot 10^{-5}$ .

## Bedömningskriterier

- a) – Korrekt användning av kvotregeln, **1 poäng**.
    - Korrekt användning av kedjeregeln eller produktregeln för  $\sin^2 x$ , **1 poäng**.
    - Korrekt slutförd derivering, **1 poäng**.
  - b) – Korrekt bestämning av derivatans nollställen, **1 poäng**.
    - Korrekt motiverat exakt värde på maximum, **1 poäng**.
    - Korrekt motiverat exakt värde på minimum, **1 poäng**.
    - Principiellt korrekt graf vad gäller växande, avtagande och värden i ändpunkter och minimum, **1 poäng**.
  - c) – Korrekt användning av Newton-Raphsons metod med korrekt svar, **1 poäng**.
    - Korrekt motiverad uppskattning av felet, **1 poäng**.
- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inte avdrag.

## Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

## Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

## Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.