

5B1134 Matematik och modeller

Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 4

Uppgift

- a) Polynomet $p(x) = 1 - 2x^2$ är en approximation av $\cos 2x$ som är bra för små värden på x . Beräkna integralerna

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \quad \text{och} \quad \int_0^{\pi/4} p(x) \, dx$$

och jämför resultaten. Hur stort blir det fel man får genom att använda approximationen? (4)

- b) Bestäm hur stort felet blir när man använder trapetsmetoden med tre delintervall för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx. \quad (2)$$

- c) Beräkna volymen av den rotations kropp som bildas då området under grafen för $f(x) = \ln(x) + 1$ roterar kring x -axeln på intervallet $1 \leq x \leq e$. (3)

Lösningsförslag

- a) Vi beräknar de båda integralerna för att se hur mycket som skiljer. Vi börjar med polynomet

$$\int_0^{\pi/4} (1 - 2x^2) \, dx = \left[x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi^3}{3 \cdot 64} - 0 + \frac{2 \cdot 0^3}{3 \cdot 64} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{96} = \frac{\pi(24 - \pi^2)}{96} \approx 0,462.$$

För att integrera $\cos 2x$ konstaterar vi att en primitiv funktion till $\cos 2x$ ges av $(1/2) \sin 2x$, eftersom derivatan av $\sin 2x$ är $2 \cos 2x$. Alltså får vi

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx = \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$$

Skillnaden mellan approximationen och det verkliga värdet av integralen är alltså

$$\frac{\pi(24 - \pi^2)}{96} - \frac{1}{2} = \frac{24\pi - \pi^3 - 48}{96} \approx -0,038.$$

b) Vi delar in intervallet i tre lika långa delintervall, $[0, \pi/12]$, $[\pi/12, 2\pi/12]$, och $[2\pi/12, \pi/4]$. På var och en av dessa approximerar vi integralen med arean av en parallelltrapets. Eftersom delintervallens längd är $\pi/12$ får vi att areorna av dessa tre parallelltrapetser blir

$$A_1 = \frac{\pi}{12} \frac{\cos(2 \cdot 0) + \cos(2 \cdot \pi/12)}{2} = \frac{\pi}{12} \frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}$$

$$A_2 = \frac{\pi}{12} \frac{\cos(2 \cdot \pi/12) + \cos(2 \cdot 2\pi/12)}{2} = \frac{\pi}{12} \frac{\sqrt{3}/2 + 1/2}{2}$$

och

$$A_3 = \frac{\pi}{12} \frac{\cos(2 \cdot 2\pi/12) + \cos(2 \cdot \pi/4)}{2} = \frac{\pi}{12} \frac{1/2 + 0}{2}$$

Lägger man ihop dessa får man

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{\pi(2 + \sqrt{3})}{24} \approx 0,489.$$

Felet blir därmed

$$\frac{\pi(2 + \sqrt{3})}{24} - \frac{1}{2} = \frac{\pi(2 + \sqrt{3}) - 12}{24} \approx -0,011.$$

c) Eftersom vi kan se rotationsvolymen som uppbyggd av tunna cirkulära skivor med radie $f(x)$ och tjocklek dx får vi att volymen ges av integralen

$$\int_1^e \pi f(x)^2 dx = \int_1^e \pi (\ln(x) + 1)^2 dx$$

För att beräkna denna integral gör vi variabelbytet $x = e^t$, som leder till skalförändringen $dx = e^t dt$. Eftersom $\ln(1) = 0$ och $\ln(e) = 1$ får vi att

$$\int_1^e \pi (\ln(x) + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (t + 1)^2 e^t dt$$

Vi behöver nu använda partiell integration för att komma vidare. Eftersom e^t är primitiv funktion till sig själv får vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t + 1)^2 e^t dt &= [(t + 1)^2 e^t]_0^1 - \int_0^1 2(t + 1) e^t dt \\ &= (1 + 1)^2 e^1 - (0 + 1)^2 e^0 - [2(t + 1) e^t]_0^1 + \int_0^1 2 e^t dt \\ &= 4e - 1 - (2(1 + 1)e^1 - 2(0 + 1)e^0) + [2e^t]_0^1 \\ &= 1 + (2e^1 - 2e^0) = 2e - 1. \end{aligned}$$

För att få volymen hos rotationskroppen behöver vi multiplicera med π och får $V = \pi(2e - 1) \approx 13,9$ volymenheter.

Man kan också använda partiell integration direkt på $(\ln(x) + 1)^2 = 1 \cdot (\ln(x) + 1)^2$ och får då

$$\begin{aligned}\int_1^e (\ln(x) + 1)^2 dx &= [x(\ln(x) + 1)^2]_1^e - \int_1^e x \cdot 2(\ln(x) + 1) \frac{1}{x} dx \\ &= e \cdot (1 + 1)^2 - 1 \cdot (0 + 1)^2 - [2x(\ln(x) + 1)]_1^e + \int_1^e 2x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 4e - 1 - (2e(1 + 1) - 2(0 + 1)) + [2x]_0^1 \\ &= 1 + (2 \cdot e - 2 \cdot 1) = 2e - 1.\end{aligned}$$

Svar:

- a) Integralernas värden blir $1/2$, respektive $\pi(24 - \pi^2)/96$ och felet man får genom att använda approximationen är $(24\pi - \pi^3 - 48)/96 \approx -0,038$.
- b) Felet man får genom att använda trapetsmetoden blir $(\pi(2 + \sqrt{3}) - 12)/24 \approx -0,011$.
- c) Rotationskroppens volym är $V = \pi(2e - 1) \approx 13,9$ volymsenheter.

Bedömningskriterier

- a)
 - Korrekt primitiv funktion till $\cos 2x$, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd integration av $\cos 2x$, **1 poäng**.
 - Korrekt primitiv funktion till $1 - 2x^2$, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd integration av $1 - 2x^2$ och korrekt värde på felet, **1 poäng**.
 - b)
 - Korrekt användning av trapetsmetoden, **1 poäng**.
 - Korrekt värde på felet, **1 poäng**.
 - c)
 - Korrekt användning av variabelbyte, **1 poäng**.
 - Korrekt användning av partiell integration, **1 poäng**.
 - Korrekt värde på volymen, **1 poäng**.
- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inte avdrag.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.