

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till tentamen
den 11 oktober 2004

1. Två av sidlängderna i en triangel är 8 m och 13 m. En av vinklarna är 60° .

a) Bestäm alla möjliga värden för den tredje sidans längd. (4)

b) Hur stor kan triangelns area maximalt vara? (3)

c) I en rätvinklig triangel delar en linje den räta vinkeln i två vinklar som är 30° , respektive 60° . Linjen delar hypotenusan i två längder som är 8 cm respektive 2 cm. Hur långa är kateterna i triangeln? (2)

Lösning: a) Vi antar att $a = 8$ m, $b = 13$ m och kallar den tredje sidans längd för c . Om motstående vinklar kallas α , β och γ har vi nu tre fall att ta ställning till; $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$ och $\gamma = 60^\circ$.

I det första fallet säger cosinussatsen att

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ = b^2 + c^2 - bc$$

Vi löser denna andragradsekvation för c och får

$$c = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - b^2 + a^2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{-251}{4}}.$$

Alltså saknas reella lösningar i detta fall.

I det andra fallet får vi

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ = a^2 - ac + c^2$$

Vi löser på samma sätt ut c och får

$$c = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a^2 + b^2} = 4 \pm \sqrt{121} = 4 \pm 11$$

Eftersom den ena lösningen är negativ är det bara $c = 4 + 11 = 15$ m som är möjlig i detta fall.

I det tredje fallet får vi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 - ab + b^2 = 64 - 104 + 169 = 129$$

och det ger en positiv lösning $c = \sqrt{129}$ m.

De möjliga värdena på den sista sidan är alltså $c = 15$ m eller $c = \sqrt{129}$ m.

b) Enligt areasatsen ges triangelns area av $(1/2)ab \sin \gamma$. Om $\gamma = 60^\circ$ får vi därmed att

$$T = \frac{1}{2}ab \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 26\sqrt{3}.$$

Om däremot $\beta = 60^\circ$ får vi

$$T = \frac{1}{2}ac \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}.$$

Alltså är det största möjliga värdet för arean $30\sqrt{3}$ areaenheter.

c) Vi kallar triangelns sidor för a , b och c , där c är hypotenusan. Motstående vinklar kallar vi α , β och γ . Eftersom $\gamma = 90^\circ$ har vi $\alpha = 90^\circ - \beta$. Om vi låter d vara avståndet från hörnet med den räta vinkeln till linjens skärning med hypotenusan har vi enligt sinussatsen att

$$\frac{\sin \beta}{d} = \frac{\sin 30^\circ}{8 \text{ cm}}$$

och

$$\frac{\sin(90^\circ - \beta)}{d} = \frac{\sin 60^\circ}{2 \text{ cm}}$$

Eftersom $\sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$ kan vi dela dessa ekvationer med varandra och få

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin 30^\circ}{4 \cos 30^\circ} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

Eftersom triangeln är rätvinklig har vi $b = a \tan \beta$ och enligt Pythagoras sats är

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2(1 + \frac{1}{48}) = \frac{49a^2}{48}$$

Eftersom $c = 2 + 8 = 10$ cm får vi $a = 10 \cdot 4\sqrt{3}/7 = 40\sqrt{3}/7$ cm och därmed $b = a \tan \beta = 10/7$ cm.

Om man har tänkt sig indelningen av hypotenusan tvärtom får på samma sätt $a = 10\sqrt{3}/\sqrt{19}$ och $b = 40/\sqrt{19}$.

Svar:

- a) Den tredje sidan kan vara $c = 15$ m eller $c = \sqrt{129}$ m.
- b) Arean av triangeln kan maximalt vara $30\sqrt{3}$ areaenheter.
- c) Kateternas längder är $a = 40\sqrt{3}/7$ cm och $b = 10/7$ cm.

2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(\frac{2x - \pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3)$$

- b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$1,2 \sin x + 1,4 \cos x = 0,54$$

med två gällande siffrors noggrannhet. (4)

- c) Använd sinussatsen för att härleda additionssatsen för sinus i det fall då alla inblandade vinklar ligger mellan 0° och 180° . (2)

Lösning: a) Eftersom sinus antar värdet $-\sqrt{3}/2$ för två värden i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$, nämligen $4\pi/3$ och $5\pi/3$ får vi lösningarna till ekvationen genom

$$\frac{2x - \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$$

dvs

$$x = \frac{3}{2} \left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n \right) = \frac{5\pi}{2} + 3\pi n$$

eller

$$\frac{2x - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

dvs

$$x = \frac{3}{2} \left(\frac{6\pi}{3} + 2\pi n \right) = 3\pi + 3\pi n = 3\pi n'.$$

- b) Vi skriver först om vänsterledet på formen $A \sin(x + \phi) = A \sin x \cos \phi + A \cos x \sin \phi$. För att vi ska få rätt vänsterled krävs att

$$\begin{cases} A \cos \phi = 1,2 \\ A \sin \phi = 1,4 \end{cases}$$

vilket ger $\tan \phi = 1,4/1,2 \approx$, och $\phi \approx 0,86$. Genom trigonometriska ettan får vi $A^2 = A^2 \sin^2 \phi + A^2 \cos^2 \phi = (1,4)^2 + (1,2)^2 = 3,4$ och därmed $A = \sqrt{3,4} \approx 1,84$. Vi behöver nu hitta den minsta positiva lösningen till

$$1,84 \sin(x + 0,86) = 0,54$$

dvs

$$\sin(x + 0,86) = 0,293$$

vilket ger $x = -0,86 + 0,30 + 2\pi n$ eller $x = -0,86 + (\pi - 0,30) + 2\pi n$. Den första positiva lösningen i den första serien ges av $n = 1$ och $x = -0,86 + 0,30 + 6,28 = 5,72$

och den första positiva lösningen i den andra serien ges av $n = 0$ där $x = -0,86 + (3,14 - 0,30) = 1,98$. Ekvationens minsta positiva lösning är alltså $x \approx 1,98 \approx 2,0$

c) Vi vet att summan av vinklarna i en triangel är 180° . Vi får därför att

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin(\gamma).$$

Med höjden mot sidan c kan vi dela in sidan c i två delar vars längder är $a \cos \beta$ och $b \cos \alpha$. Enligt sinussatsen gäller att

$$a = c \sin \alpha / \sin \gamma \quad \text{och} \quad b = c \sin \beta / \sin \gamma$$

Vi får därmed att

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha = \frac{c \sin \alpha \cos \beta}{\sin \gamma} + \frac{c \sin \beta \cos \alpha}{\sin \gamma}$$

När vi multiplicerar detta med $\sin \gamma$ och dividerar med c får vi

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$

vilket tillsammans med $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$ ger additionssatsen för sinus.

Svar:

- a) Lösningarna till ekvationen ges av $x = 5\pi/2 + 3\pi n$ och $x = 3\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal. ($150^\circ + n \cdot 540^\circ$ och $n \cdot 540^\circ$.)
- b) Den minsta positiva lösningen ges av $x \approx 2,0$.

3. a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Härled derivatan av $\tan x$ direkt från definitionen av derivata. (Ledning: Använd att $(\sin x)/x$ går mot 1 när x går mot noll.) (2)

Lösning: a) Vi ser att funktionen kan skrivas som $f(x) = g(x)/h(x)$ där $g(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ och $h(x) = e^{2x} + e^{-2x}$. Enligt kvotregeln är

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

och i vårt fall får vi att

$$g'(x) = 2e^{2x} - (-2)e^{-2x} = 2(e^{2x} + e^{-2x}) = 2h(x)$$

och

$$h'(x) = 2e^{2x} + (-2)e^{-2x} = 2(e^{2x} - e^{-2x}) = 2g(x)$$

där vi har använt kedjeregeln för att derivera exponentialfunktionerna. När vi sätter in detta i uttrycket ovan får vi

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2} = \frac{2h(x)^2 - 2g(x)^2}{h(x)^2} = \frac{8}{h(x)^2} = \frac{8}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}$$

där vi använt att

$$h(x)^2 - g(x)^2 = (h(x) + g(x))(h(x) - g(x)) = (2e^{2x})(2e^{-2x}) = 4.$$

- b) För att hitta lokala extrempunkter ser vi på nollställena till derivatan av funktionen. Enligt kvotregeln kan vi beräkna derivatan av $g(x)$ som

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(\sin x)'(2 + \cos x) - (\sin x)(2 + \cos x)'}{(2 + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x)(2 + \cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

Vi ser att derivatan är definierad överallt eftersom nämnaren ligger mellan 1 och 3^2 . För att derivatan skall vara noll måste täljaren i uttrycket vara noll, dvs

$$1 + 2 \cos x = 0.$$

I intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ inträffar detta vid $x = 2\pi/3$ och $x = 4\pi/3$. Vi sätter in dessa värden i funktionen och får

$$g(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}/2}{2 + (-1/2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

och

$$g(4\pi/3) = \frac{-\sqrt{3}/2}{2 + (-1/2)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vi jämför detta med funktionens värden i ändpunkterna av intervallet där

$$g(0) = g(2\pi) = \frac{0}{2 + 1} = 0.$$

Alltså är funktionens största värde $\sqrt{3}/3$ och dess minsta värde $-\sqrt{3}/3$.

Funktionens nollställen är samma som nollställena för täljaren och $\sin x = 0$ för $x = n\pi$. Vi kan därmed rita upp funktionens graf som

c) Vi ställer upp differenskvoten

$$D(h) = \frac{\tan(x+h) - \tan(x)}{h}$$

och skriver om den på gemensamt bråkstreck som

$$D(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{\sin(x+h)\cos(x) - \sin(x)\cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos(x)} \right)$$

Vi använder nu subtraktionssatsen för sinus för att se att

$$D(h) = \frac{1}{h} \left(\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos(x)} \right) = \frac{\sin h}{h} \left(\frac{1}{\cos(x+h)\cos(x)} \right)$$

När vi låter h gå mot noll har vi att $(\sin h)/h$ går mot 1 och $\cos(x+h)$ går mot $\cos(x)$. Alltså har vi att $D(h)$ går mot $1/\cos^2 x$.

Svar:

- a) Derivatan är $f'(x) = 8/(e^{2x} + e^{-2x})^2$.
- b) Det största värdet är $\sqrt{3}/3$ och det minsta är $-\sqrt{3}/3$.
- c) Derivatan av $\tan(x)$ är $1/\cos^2(x)$.

4. a) Kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{-2x}$ avgränsar tillsammans med linjen $x = \ln(2)$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. (3)

- b) Beräkna integralen

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx.$$

med hjälp av variabelbyte.

(3)

- c) Bestäm det värde på konstanten a som minimerar

$$\int_0^\pi (ax - \sin x)^2 dx.$$

(3)

Lösning: a) Eftersom $e^{2x} \geq e^{-2x}$ för positiva x har vi att arean av området ges av integralen

$$\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - e^{-2x}) dx$$

Eftersom derivatan av e^{2x} enligt kedjeregeln är $2e^{2x}$ är $e^{2x}/2$ en primitiv funktion till e^{2x} . På samma sätt är $-e^{-2x}/2$ en primitiv funktion till e^{-2x} . Alltså kan vi beräkna integralen som

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - e^{-2x}) dx &= \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^{\ln(2)} = \left(\frac{e^{2\ln(2)}}{2} + \frac{e^{-2\ln(2)}}{2} \right) - \left(\frac{e^{2 \cdot 0}}{2} + \frac{e^{-2 \cdot 0}}{2} \right) \\ &= \frac{2^2}{2} + \frac{2^{-2}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

- b) Vi använder variabelbytet $t = 2 + \cos x$, vilket ger omskalningen $dt = -\sin x dx$. När $x = 0$ har vi $t = 2 + \cos(0) = 2 + 1 = 3$ och när $x = \pi$ har vi $t = 2 + \cos(\pi) = 2 + (-1) = 1$. Alltså omvandlas integralen i variabelbytet till

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = \int_3^1 \frac{-1}{t} dt = \int_1^3 \frac{1}{t} dt$$

Eftersom derivatan av $\ln(t)$ är $1/t$ är $\ln(t)$ en primitiv funktion till $1/t$. Alltså får vi

$$\int_1^3 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3) - 0 = \ln(3) \quad (\approx 1,1).$$

- c) Vi börjar med att utveckla integranden med kvadreringsregeln och får

$$(ax - \sin x)^2 = a^2 x^2 - 2ax \sin x + \sin^2 x.$$

På grund av linjäriteten hos integralen får vi

$$I(a) = \int_0^\pi (a^2 x^2 - 2ax \sin x + \sin^2 x) dx = a^2 \int_0^\pi x^2 dx - 2a \int_0^\pi x \sin x dx + \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

Eftersom $I(a)$ är ett positivt andragsuttryck har det sitt minimum vid derivatans nollställe, dvs där $I'(a) = 0$. Vi har att

$$I'(a) = 2a \int_0^\pi x^2 dx - 2 \int_0^\pi x \sin x dx$$

och $I'(a) = 0$ innebär att

$$a = \frac{\int_0^\pi x \sin x dx}{\int_0^\pi x^2 dx}$$

Vi kan integrera täljaren i detta uttryck med hjälp av partiell integration

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x dx &= [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= (\pi \cdot -(-1)) - 0 \cdot (-1) - [-\sin x]_0^\pi = \pi - (0 - 0) = \pi. \end{aligned}$$

Nämnaren är ett polynom som vi kan integrera genom

$$\int_0^\pi x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}$$

Värdet som minimerar integralen är alltså

$$a = \frac{\int_0^\pi x \sin x dx}{\int_0^\pi x^2 dx} = \frac{\pi}{\frac{\pi^3}{3}} = \frac{3}{\pi^2}.$$

Svar:

a) Arean av området är $9/8$ areaenheter.

b) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = \ln(3)$

c) Värdet på a som minimerar integralen är $a = 3/\pi^2$.