KTH Matematik

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till kompletteringstentamen
den 30 oktober 2004

1. I triangeln ABC är vinklarna $A = 42°$, $B = 63°$ och $C = 75°$.

   a) Bestäm hur långa de övriga sidor är ifall den kortaste sidan har längd 15 m. Ange sidlängderna med två gällande siffors noggrannhet. **(3)**

   b) Bestäm alla tre sidlängder med två gällande siffrors noggrannhet ifall arean av triangeln är 1000 m^2. **(4)**

   c) Härled cosinussatsen med hjälp av Pythagoras sats genom att dra en höjd mot en av sidorna. **(2)**

   Lösning: a) Vi vet enligt sinussatsen att

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

om a, b och c är sidlängderna som står mot vinklarna A, B och C. Nu vet vi att $\sin 42° \approx 0,669$, $\sin 63° \approx 0,891$ och $\sin 75° \approx 0,966$. Alltså måste a vara den kortaste sidan och vi får b och c genom

$$b = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot a \approx \frac{0,891}{0,669} \cdot 15 \text{ m} \approx 20,0 \text{ m} \approx 20 \text{ m}$$

och

$$c = \frac{\sin C}{\sin A} \cdot a \approx \frac{0,966}{0,669} \cdot 15 \text{ m} \approx 21,7 \text{ m} \approx 22 \text{ m}$$

b) Vi vet enligt areasatsen och sinussatsen att triangelns area ges av

$$\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sin B}{\sin A} \cdot a \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Om arean är 1000 m^2 måste vi ha

$$\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = 1000 \text{ m}^2$$

och vi kan lösa ut a genom

$$a^2 = \frac{2 \sin A}{\sin B \sin C} \cdot 1000 \text{ m}^2 \approx 1555 \text{ m}^2$$

vilket ger $a \approx 39$ m. På samma sätt kan vi få

$$b^2 = \frac{2\sin B}{\sin A \sin C} \cdot 1000 \text{ m}^2 \approx 2757 \text{ m}^2$$

som ger $b \approx 53$ m samt

$$c^2 = \frac{2\sin C}{\sin A \sin B} \cdot 1000 \text{ m}^2 \approx 3240 \text{ m}^2$$

som ger $c \approx 57$ m.

c) Vi drar en vinkelrät linje mot sidan c genom hörnet C. Denna skär sidan x på avstånd x från hörnet A och vi har att $x = b\cos A$. Vi har nu delat in triangeln i två rätvinkliga trianglar som vi kan använda Pythagoras sats på. Vi får

$$x^2 + h^2 = b^2$$

och

$$(c-x)^2 + h^2 = a^2$$

När vi sedan subtraherar dessa två ekvationer från varandra får vi

$$(c-x)^2 - x^2 = a^2 - b^2$$

vilket efter användning av kvadratregeln ger

$$c^2 - 2cx = a^2 - b^2$$

Vi kan nu skriva om detta som

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx = b^2 + c^2 - 2c(b\cos A) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

som är en av formuleringarna av cosinussatsen.

Svar:

a) De övriga sidorna är 20 m respektive 22 m.

b) Sidlängderna är 39 m, 53 m och 57 m.

2. a) Bestäm samtliga nollställen till funktionen

$$f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

(3)

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x = 0.$$

(3)

c) Vilket är det minsta positiva tal, x, där det inte spelar någon roll om man har miniräknaren inställd på radianer eller grader när man skall beräkna $\sin x$? **(3)**

Lösning: a) Vi konstaterar först att funktionen $f(x) = 0$ innebär att

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$$

vilket är detsamma som att

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Sinusfunktionen antar värdet $-1/2$ för två värden i intervallet $[0, 2\pi]$, nämligen $7\pi/6$ och $11\pi/6$. Vi har därmed att lösningarna till ekvationen fås genom

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$$

eller

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n.$$

När vi löser ut x ur dessa får vi

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) = \frac{11\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}$$

eller

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) = \frac{19\pi}{36} + \frac{2\pi n}{3}$$

där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi kan skriva om $\sin 2x$ som $2\sin x\cos x$ och ekvationen blir då

$$\sin x + 2\sin x\cos x = 0.$$

Vi får lösningar $x = n\pi$, då $\sin x = 0$, men annars kan vi dela med $\sin x$ och får ekvationen

$$1 + 2\cos x = 0$$

som innebär att $\cos x = -1/2$. Detta inträffar två gånger i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$, nämligen för $x = 2\pi/3$ och $x = 4\pi/3$. Resten av lösningarna fås av periodiciteten till

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

och

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n.$$

c) Om vi tänker oss att x givet i grader så kan vi omvandla det till radianer genom att multiplicera med $\pi/180$. För att det ska bli samma sak oavsett om vi ställt in räknaren på radianer eller grader måste

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

Det finns nu två möjligheter. Antingen är

$$x = \frac{\pi}{180}x + 2\pi n$$

eller så är

$$\pi - x = \frac{180}{\pi}x + 2\pi n$$

Den första ekvationen ger

$$x = \frac{2\pi n}{1 - \frac{\pi}{180}} = \frac{360\pi n}{180 - \pi}$$

och den andra ekvationen ger

$$x = \frac{\pi - 2\pi n}{1 + \frac{\pi}{180}} = \frac{180\pi(1 - 2n)}{180 + \pi}$$

För att se vilket av dessa som ger minsta positiva tal konstaterar vi att den första ger multipler av $360\pi/(180 - \pi) \approx 6,39$ medan den andra ger udda multipler av $180\pi/(180 + \pi) \approx 3,09$. Det minsta positiva tal som fungerar är därmed

$$x = \frac{180\pi}{180 + \pi}.$$

Svar:

a) Lösningarna är $x = 11\pi/36 + 2\pi n/3$ och $x = 19\pi/36 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Lösningarna är $x = n\pi$, $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ och $x = 4\pi/3 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal. (Lösningen kan också skrivas som $x = 2\pi n/3$ och $(2n + 1)\pi$, för godtyckligt n.)

c) Det minsta positiva tal som uppfyller kravet är $x = 180\pi/(180 + \pi)$.

3. a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{2+x}{5+x^2}$$

på intervallet $-5 \le x \le 5$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Visa direkt från definitionen av derivata att en exponentialfunktion, $h(x)$, uppfyller

$$h'(x) = h(x)\frac{h'(0)}{h(0)}.$$

(2)

Lösning: a) För att derivera $f(x)$ kan vi använda kvotregeln som säger att om $f(x) = g(x)/h(x)$ så är

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$$

I vårt fall är nu $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$ och $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Eftersom $(\sin x)' = \cos x$ och $(\cos x)' = -\sin x$ får vi att

$$g'(x) = \cos(x) - (-\sin(x)) = \cos x + \sin x = h(x)$$

och

$$h'(x) = \cos(x) + (-\sin(x)) = \cos x - \sin x = -g(x).$$

När vi sätter vi detta i kvotregeln får vi

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2} = \frac{h(x)h(x) - g(x)(-g(x)}{h(x)^2} = \frac{h(x)^2 + g(x)^2}{h(x)^2}$$

Vi kan förenkla täljaren genom

$$\begin{aligned} h(x)^2 + g(x)^2 &= (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 \\ &= \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x \\ &= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \end{aligned}$$

och nämnaren kan förenklas genom

$$h(x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$$

Alltså ges derivatan av $f(x)$ av

$$f'(x) = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{1 + \sin 2x}$$

b) För att se om det finns några lokala extrempunkter i intervallet beräknar vi först derivatan av funktionen $g(x)$. Vi får enligt kvotregeln att

$$g'(x) = \frac{(2+x)'(5+x^2) - (2+x)(5+x^2)'}{(5+x^2)^2} = \frac{1\cdot(5+x^2) - (2+x)(2x)}{(5+x^2)^2} = \frac{5-4x-x^2}{(5+x^2)^2}.$$

Vi ser att derivatan är definierad överallt eftersom nämnaren inte kan vara noll. Vi en lokal extrempunkt måste därför derviatan vara noll och därmed

$$5 - 4x - x^2 = 0$$

Med kvadratkomplettering kan vi skriva detta som $5 + 4 - (2+x)^2 = 0$ och vi får lösningarna som $x = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3$. Den ena lösningen, $x = -2 - 3 = -5$ ligger i intervallets vänstra ändpunkt och den andra lösningen, $x = -2+3 = 1$ ligger i intervallet. Vi räknar ut funktionens värde i ändpunkterna och i extrempunkten $x = 1$ och får

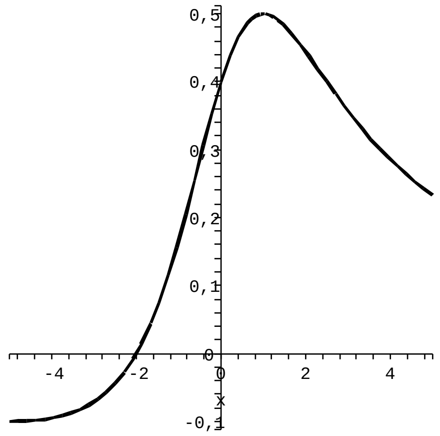
$$g(-5) = \frac{2+(-5)}{5+(-5)^2} = \frac{-3}{30} = -\frac{1}{10},$$

$$g(1) = \frac{2+1}{5+1^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

och

$$g(5) = \frac{2+5}{5+5^2} = \frac{7}{30}.$$

Eftersom $1/2 = 15/30 > 7/30 > -1/10$ är funktionens största värde $1/2$ och dess minsta värde $-1/10$ på intervallet $-5 < x < 5$. Derivatan har ett nollställe i intervallets vänstra ändpunkt och i den högra ändpunkten är derivatan $g'(5) = (5-4\cdot5-5^2)/(5+5^2)^2 = -40/(30)^2 = -2/45 \approx -0,044$. Funktionen har ett nollställe i $x = -2$ och skärningen med y-axeln ges av $g(0) = (2+0)/(5+0^2) = 2/5 = 0,4$. Allstå kan vi rita upp grafen som



c) Låt $h(x) = Ca^x$ vara en exponentialfunktion där $C \neq 0$. Enligt definitionen av derivata har vi

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{Ca^{x+h} - Ca^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{Ca^x(a^h - 1)}{h} = h(x) \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Om vi sätter in $x = 0$ i detta får vi

$$h'(0) = h(0) \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = h(0) \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Alltså kan vi ersätta gränsvärdet

$$C \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

med $h'(0)/h(0)$ och vi får då $h'(x) = h(x)h'(0)/h(0)$, vilket skulle visas.

Svar:

a) Derivatan är $f'(x) = 2/(1 + \sin 2x)$.

b) Det största värdet är $1/2$ och det minsta värdet är $-1/10$.

4. a) Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av parabeln $y = 4 - x^2$ och linjen $y = 1 + 2x$. **(3)**

b) Använd variabelbytet $x = \tan t$ för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

(3)

c) Beräkna arean mellan de två kurvorna $y = \sin(x + a)$ och $y = \sin(x + b)$ på ett intervall som ligger mellan två närstående skärningspunkter. **(3)**

Lösning: a) Vi måste först undersöka var kurvan skär linjen. Skärningspunkterna ges av ekvationen

$$4 - x^2 = 1 + 2x$$

dvs $x^2 + 2x - 3 = 0$, som med kvadratkomplettering kan skrivas som $(x + 1)^2 - 4 = 0$. Skärningarna är därmed vid $x = -1 \pm 2$. På intervallet $-3 \leq x \leq 1$ ligger andragradskurvan ovanför linjen och arean av området mellan dem ges därmed av

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{1} (4 - x^2 - (1 + 2x))\, dx = \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)\, dx = \left[3x - 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} \\ &= \left(3 \cdot 1 - 2\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(3 \cdot (-3) - 2\frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right) \\ &= 3 - 1 - \frac{1}{3} - (-9) + 9 + (-9) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

b) När vi utför variabelbytet $x = \tan t$ får vi skalförändringen

$$dx = (\tan t)'\,dt = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)'\,dt = \frac{(\cos t)(\cos t) - (\sin t)(-\sin t)}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

För att få fram gränserna ser vi att $t = \arctan x$ ger undre gränsen $\arctan 0 = 0$ och övre gränsen $\arctan 1 = \pi/4$. Vi kan nu beräkna integralen som

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt.$$

Vi förenklar integranden genom

$$\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1.$$

Därmed får vi att

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/4} 1\,dt = [t]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

c) Vi kan få skärningspunkterna mellan kurvorna genom

$$x + a = x + b + 2\pi n$$

eller

$$x + a = \pi - (x + b) + 2\pi n$$

Eftersom det första bara kan inträffa om $a - b = 2\pi n$ ges skärningspunkterna mellan kurvorna av

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{a+b}{2} + \pi n$$

Vi kan välja $n = -1$ och $n = 0$ och får då intervallet $-\pi/2 - (a+b)/2 \leq x \leq \pi/2 - (a+b)/2$. Genom att göra variabelbytet $x = t - (a+b)/2$ får vi att arean ges av

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t + \tfrac{a-b}{2}\right) - \sin\left(t + \tfrac{b-a}{2}\right)\,dt = \left[-\cos\left(t + \tfrac{a-b}{2}\right) + \cos\left(t + \tfrac{b-a}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(-\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{b-a}{2}\right)\right) - \left(-\cos\left(-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{a-b}{2}\right) + \cos\left(-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{b-a}{2}\right)\right) \\
&= \left(\sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{b-a}{2}\right)\right) - \left(-\sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{b-a}{2}\right)\right) = 4\sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

under förutsättning att detta är positivt. Annars ligger den första kurvan under den andra och vi får byta tecken.

Svar:

a) Arean av området är $32/3$ areaenheter.

b) Integralens värde är $\pi/4$.

c) Arean av området är $4|\sin((a-b)/2)| \qquad (= 2\sqrt{2 - 2\cos(a-b)})$.