

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till tentamen
den 12 januari 2005

1. a) I en triangel är två av sidlängderna 7 respektive 8 längdenheter och vinkeln mellan dessa sidor är 120° . Bestäm den tredje sidans längd och triangelns area. **(3)**
- b) Bestäm sidlängderna i en triangel där vinklarna är 34° , 57° och 89° och triangelns area är 44 cm^2 . Ange svaren med två värdesiffror. **(3)**
- c) Två tangenter till en cirkel med radie r möts vid en vinkel av 45° . Hur stor är arean av det område som ligger mellan tangenterna och cirkeln? **(3)**

Lösning: Vi kallar sidornas längder för a , b och c med $a = 7$ och $b = 8$. Enligt cosinussatsen är nu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ = a^2 + b^2 + ab = 7^2 + 8^2 + 7 \cdot 8 = 49 + 64 + 56 = 169 = 13^2.$$

Alltså är den tredje sidans längd $c = 13$ längdenheter.

Triangelns area ges enligt areasatsen av

$$\frac{1}{2}ab \sin 120^\circ = \frac{1}{2}7 \cdot 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

areaenheter.

b) Beteckna vinklarna $\alpha = 34^\circ$, $\beta = 57^\circ$ och $\gamma = 89^\circ$ och motstående sidlängder a , b och c . Vi har enligt sinussatsen att

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Areasatsen ges att triangelns area kan skrivas som

$$T = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} \sin \gamma = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}$$

Vi kan därmed lösa ut c^2 som

$$c^2 = \frac{2T \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{2 \cdot 44 \sin 89^\circ}{\sin 34^\circ \sin 57^\circ} \approx 187,6 \text{ cm}^2$$

och $c \approx 13,7$ cm. På samma sätt får vi

$$b^2 = \frac{2T \sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma} = \frac{2 \cdot 44 \sin 57^\circ}{\sin 34^\circ \sin 89^\circ} \approx 132,0 \text{ cm}^2$$

och

$$a^2 = \frac{2T \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = \frac{2 \cdot 44 \sin 34^\circ}{\sin 57^\circ \sin 89^\circ} \approx 58,7 \text{ cm}^2$$

vilket ger $b \approx 11,5$ cm och $a \approx 7,66$ cm.

c) Vi kallar tangeringspunkterna för A och B , cirkelns centrum för C och tangenternas skärningspunkt för D . Vi har då en fyrhörning $ACBD$ med två räta vinklar vid A och B . Vinkeln D är 45° och den fjärde vinkeln vid C måste då vara $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Om vi betecknar avståndet mellan A och D för ℓ kan vi med cosinussatsen få två olika uttryck för kvadraten på avståndet mellan A och B

$$r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 135^\circ = \ell^2 + \ell^2 - 2\ell^2 \cos 45^\circ$$

dvs

$$r^2(2 + \sqrt{2}) = \ell^2(2 - \sqrt{2}).$$

Vi kan alltså lösa ut ℓ som

$$\ell^2 = r^2 \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = r^2 \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = r^2 \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} =$$

och

$$\ell = r \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = r(1 + \sqrt{2}).$$

Fyrhörningen består av två rätvinkliga trianglar med kateter r och ℓ , vilket ger den sammanlagda arean $r\ell$. Det återstår nu att ta bort arean för cirkelsektorn för att få den sökta arean. Öppningsvinkeln i sektorn är 135° , eller $3\pi/4$ radianer. Sektorns area är därmed $3\pi r^2/8$ och den sökta arean är

$$r\ell - \frac{3\pi r^2}{8} = \left(1 + \sqrt{2} - \frac{3\pi}{8}\right) r^2$$

Svar:

- a) Den tredje sidans längd är 13 och arean är $14\sqrt{3}$.
- b) Sidlängderna är 7,7 cm, 11 cm och 14 cm.

c) Arealen av området är $(1 + \sqrt{2} - 3\pi/8)r^2$.

2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$

b) Bestäm ett närmevärde med två gällande siffror till den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\sin x + 2 \cos x = \sqrt{2} \quad (4)$$

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0. \quad (2)$$

Lösning: a) Vi börjar med att införa $t = 5x - 2\pi/3$. Inom intervallet $0 \leq t \leq 2\pi$ antar $\sin(t)$ värdet $-\sqrt{2}/2$ två gånger, för $t = 5\pi/4$ och $t = 7\pi/4$. De andra lösningarna till $\sin t = -\sqrt{2}/2$ fås genom periodiciteten av $t = 5\pi/4 + 2\pi n$ respektive $t = 7\pi/4 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

Eftersom vi kan lösa ut x som $x = (t + 2\pi/3)/5$ får vi samtliga lösningar till ekvationen som

$$x = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi n + \frac{2\pi}{3}}{5} = \frac{15\pi + 24\pi n + 8\pi}{60} = \frac{23\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}$$

och

$$x = \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi n + \frac{2\pi}{3}}{5} = \frac{21\pi + 24\pi n + 8\pi}{60} = \frac{29\pi}{60} + \frac{2\pi n}{5}$$

b) Vi skriver vänsterledet som $A \sin(x + \phi) = A \cos \phi \sin x + A \sin \phi \cos x$. För att detta ska stämma med det givna måste vi ha

$$\begin{cases} A \cos \phi = 1 \\ A \sin \phi = 2 \end{cases}$$

vilket är uppfyllt om $A^2 = A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi = 1^2 + 2^2 = 5$ och $\phi = \arctan 2 \approx 1,11$.

Lösningarna till ekvationen ges nu av

$$x + \phi = \arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}) + 2\pi n$$

och

$$x + \phi = \pi - \arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}) + 2\pi n$$

för godtyckliga heltal n . Vi har att $\arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}) \approx 0,685$. För $n = 0$ får vi $x = \arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}) - \arctan 2 \approx -0.422$ och $x = \pi - \arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}) - \arctan 2 \approx 1,35$. Eftersom perioden är $2\pi \approx 6,28$ så måste den minsta positiva lösningen vara $x \approx 1,35$.

c) Med hjälp av additionssatsen för sinus kan vi skriva $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$. Vi har också att $\sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cos x$ och $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$. Därmed får vi

$$\sin 3x = 2 \sin x \cos^2 x + \sin x(2 \cos^2 x - 1) = \sin x(4 \cos^2 x - 1)$$

Alltså kan vi skriva om vänsterledet i ekvationen som

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= \sin x + 2 \sin x \cos x + \sin x(4 \cos^2 x - 1) \\ &= \sin x(1 + 2 \cos x + 4 \cos^2 x - 1) \\ &= 2 \sin x \cos x(1 + 2 \cos x) \end{aligned}$$

Nollställena till $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$ ges därmed av nollställena till de tre faktorerna $\sin x$, $\cos x$ och $1 + 2 \cos x$. Någon av de två första är noll precis vid varje multipel av $\pi/2$. Lösningarna till $1 + 2 \cos x = 0$ i intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ ges av $x = \pm 2\pi/3$. Alltså ges resterande lösningar av $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$.

Svar:

- a) Lösningarna är $23\pi/24 + 2\pi n/5$ och $29\pi/24 + 2\pi n/5$, där n är ett godtyckligt heltal.
 - b) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 1,35$. ($77,3^\circ$)
 - c) Lösningarna är $n\pi/2$ och $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.
3. a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x} \cos(x)}$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

- b) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde till nollstället till funktionen $f(x) = \sin(x) + x - 1$. Utför två iterationer med startvärde $x = 0$. och ange nollstället med korrekt antal gällande siffror. **(4)**

- c) Härled formeln för derivatan av en produkt av två deriverbara funktioner. **(2)**

Lösning: a) Vi börjar med att skriva $f(x) = \sqrt{g(x)}$, där $g(x) = 1 - e^{-2x} \cos x$. Eftersom derivatan av $\sqrt{x}$ är $1/(2\sqrt{x})$ får vi enligt kedjeregeln derivatan av $f(x)$ som

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}.$$

För att derivera $g(x)$ behöver vi kedjeregeln som ger att derivatan av e^{-2x} är $-2e^{-2x}$ och produktregeln som ger att derivatan av $e^{-2x} \cos x$ är

$$-2e^{-2x} \cos x + e^{-2x}(-\sin x) = -(2 \cos x + \sin x)e^{-2x}$$

Eftersom derivatan av konstanten 1 är noll får vi nu

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{(2 \cos x + \sin x)e^{-2x}}{2\sqrt{1 - e^{-2x} \cos x}}.$$

b) För att använda Newton-Raphsons metod behöver vi först derivera funktionen $f(x) = \sin(x) + x - 1$ och vi får då $f'(x) = \cos(x) + 1$. När vi börjar med $x_1 = 0$ får vi nu

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0 - \frac{\sin(0) + 0 - 1}{\cos(0) + 1} = 0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

och

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{1}{2} - \frac{\sin(1/2) + 1/2 - 1}{\cos(1/2) + 1} \approx 0,51$$

Korrektionen i nästa steg är

$$\frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \frac{\sin(0.51) + 0.51 - 1}{\cos(0.51) + 1} \approx 0.002$$

vilket antyder att x_3 är ett närmevärde med två gällande siffrors noggrannhet.

c) Vi kan skriva om differenskvoten för $f(x)g(x)$ som

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &\quad + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Om både $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara har vi gränsvärdena

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{och} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

Dessutom är

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x).$$

Därmed får vi att

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \left(\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \right) + f(x) \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

Svar:

- a) Derivatans är $f'(x) = (2 \cos x + \sin x) / (2\sqrt{1 - e^{-2x} \cos x})$.
- b) Nollstället är $x = 0,51$ med två gällande siffrors noggrannhet.
4. a) Kurvan $f(x) = \sin(x)$ avgränsar tillsammans med dess tangenter i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. (4)
- b) Samma område roterar kring x -axeln. Beräkna volymen av den rotations kropp som bildas. (3)
- c) Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

med hjälp av ett variabelbyte. (2)

Lösning: Vi börjar med att rita upp området. Vid $x = 0$ är tangentens lutning 1 eftersom derivatan av $\sin x$ är $\cos x$ och $\cos 0 = 1$. Vid $x = \pi$ är tangentens lutning $\cos \pi = -1$. Vi får alltså följande figur

Vi kan få områdets area genom integralerna

$$\int_0^{\pi/2} (x - \sin x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x - \sin x) dx$$

eller genom att ta triangelns area minus arean under sinuskurvan. Den första integralen ges av

$$\int_0^{\pi/2} (x - \sin x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} + 0 - (0 + 1) = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

och den andra ges av

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x - \sin x) dx \left[\pi x - \frac{x^2}{2} + \cos x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} + (-1) - \left(\pi \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8} + 0 \right) = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

vilket också kunde ses genom symmetrin med hjälp av den första integralen. Områdets area är alltså

$$2 \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

b) När området roterar kring x -axeln bildas en rotationsvolym som kan ses som skillnaden mellan rotationsvolymerna för den övre och den nedre kurvan. Den övre

kurvan ger upphov till en dubbelkon med radie $\pi/2$ och sammanlagd höjd π och dess volym är därmed $\pi \cdot \pi^2/4 \cdot \pi/3 = \pi^4/12$. Vi kan också räkna ut detta genom integralerna

$$\int_0^{\pi/2} \pi x^2 dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \pi(\pi-x)^2 dx = \left[\pi \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi/2} + \left[-\pi \frac{(\pi-x)^3}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^4}{24} - 0 - 0 + \frac{\pi^4}{24} = \frac{\pi^4}{12}.$$

Den inre rotationsvolymen ges av integralen

$$\int_0^{\pi} \pi \sin^2 x dx$$

Eftersom vi kan skriva om $\sin^2 x$ som $(1 - \cos 2x)/2$ får vi

$$\int_0^{\pi} \pi \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi \sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 0 - (0 - 0) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Volymen av den givna rotationskroppen är således skillnaden

$$\frac{\pi^4}{12} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2(\pi^2 - 6)}{12}.$$

c) Vi genomför variabelbytet $t = 1 + \sqrt{x}$ och får då

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

och gränserna ändras till $t = 1 + \sqrt{0} = 1$, respektive $t = 1 + \sqrt{1} = 2$. Alltså är

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{2\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{2t - 2}{t} \cdot dt = \int_1^2 2 - \frac{2}{t} \cdot dt \\ &= [2t - 2 \ln t]_1^2 = (2 \cdot 2 - 2 \ln 2) - (2 \cdot 1 - 2 \ln 1) = 2 - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Svar:

- a) Arealen är $(\pi^2 - 8)/4$.
- b) Volymen är $\pi^2(\pi^2 - 6)/12$.
- c) $\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = 2 - 2 \ln 2$.