

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till tentamen
den 29 augusti 2005

1. a) Om två av sidorna i en triangel är 5 meter respektive 6 meter. Vilka längder på den tredje sidans längd ger upphov till en triangel med en area på minst 9 kvadratmeter. (5)
- b) Jämför arean av en regelbunden oktagon med sida $1/\sqrt{2}$ med en regelbunden hexagon med sida 1. Vilken är störst? (4)

Lösning: a) Om vinkeln mellan de två angivna sidorna är α ges arean av triangeln av

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \sin \alpha$$

och vi får en olikhet

$$\sin \alpha \geq \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Om $\sin \alpha \geq 3/5$ så måste $\cos \alpha$ ligga mellan $-4/5$ och $4/5$. Enligt cosinussatsen får vi den tredje sidans längd genom

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Därmed får vi

$$a^2 \geq 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 25 + 36 - 48 = 13$$

och

$$a^2 \leq 5^2 + 6^2 + 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 25 + 36 + 48 = 109$$

Alltså kan den tredje sidans längd variera mellan $\sqrt{13}$ och $\sqrt{109}$.

b) En hexagon med sidan ett är sammansatt av sex liksidiga trianglar med sidan ett. vinklarna i en sådan triangel är 60° och dess area är därmed

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Hexagonens sammanlagda area är därmed $3\sqrt{3}/2 \approx 2,6$.

En oktagon kan vi dela in i åtta likbenta trianglar med vinkeln 45° . Om vi låter r vara sidorna kring denna vinkel får vi att oktagonens sida s uppfyller

$$s^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 45^\circ = 2r^2(1 - \sqrt{2}/2) = (2 - \sqrt{2})r^2$$

och arean av varje triangel ges enligt areasatsen av

$$\frac{1}{2}r^2 \sin 45^\circ = \frac{r^2\sqrt{2}}{4}.$$

Den sammanlagda arean av oktagonen är således

$$2\sqrt{2}r^2 = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}s^2 = (2\sqrt{2} + 2)s^2.$$

Vi hade nu att $s = 1/\sqrt{2}$ vilket ger arean $\sqrt{2} + 1 \approx 2,4$. Alltså är hexagonens area större.

Svar:

- a) Den tredje sidans längd kan variera mellan $\sqrt{13}$ och $\sqrt{109}$ för att arean skall vara minst 9 kvadratmeter.
- b) Hexagonens area är $3\sqrt{3}/2 \approx 2,6$ areaenheter medan oktagonens bara är $1 + \sqrt{2} \approx 2,4$ areaenheter.

2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(2t + \pi/5) = -\sqrt{3} \tag{4}$$

- b) Bestäm med två värdesiffrors noggrannhet konstanterna A och ϕ sådana att

$$A \sin(x + \phi) = 5 \sin x - 3 \cos x. \tag{3}$$

- c) Skriv $\cos 4x$ som ett polynom i $\cos x$. (2)

Lösning: a) Vi konstaterar först att $\tan x = -\sqrt{3}$ har en lösning för $x = -\pi/3$. Eftersom $\tan x$ är periodisk med period π får vi därmed alla lösningar till $\tan x = -\sqrt{3}$ som $x = -\pi/3 + n\pi$, för heltal n .

Med $x = 2t + \pi/5$ får vi därmed att alla lösningar till den ursprungliga ekvationen ges av

$$t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10} + n\frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{30} + n\frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{15} + n\frac{\pi}{2}$$

- b) Enligt additionssatsen för sinus får vi

$$A \sin(x + \phi) = A \sin x \cos \phi + A \cos x \sin \phi$$

och likställer vi uttrycken får vi en lösning om

$$\begin{cases} A \cos \phi &= 5, \\ A \sin \phi &= -3. \end{cases}$$

Genom att kvadrera båda ekvationerna och summera dem får vi

$$A^2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 5^2 + (-3)^2 = 34,$$

vilket ger $A^2 = 34$. Om vi nu delar med $A = \sqrt{34}$ får vi

$$\begin{cases} \cos \phi = 5/\sqrt{34} \approx 0,857, \\ \sin \phi = -3/\sqrt{34} \approx -0,514. \end{cases}$$

Därmed måste ϕ ligga i fjärde kvadranten i enhetscirkeln och enligt tabellen får vi $\phi \approx -0.54$ radianer eller $\phi \approx -31^\circ$.

c) Vi använder additionsregeln för cosinus för att skriva om

$$\cos 2x = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

När vi sedan ser på $\cos 4x = \cos 2(2x)$ får vi

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.$$

Svar:

a) Lösningarna ges av $x = -4\pi/15 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) $A = \sqrt{34} \approx 5,8$.

c) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

3. a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \ln x \sin^2 x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{2x^2 + 8}{2x + 3}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 3$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. (4)

c) Om man behöver beräkna $\sqrt{57}$ med en miniräknare som saknar kvadratrotsfunktion kan man använda Newton-Raphsons metod. Använd den för att beräkna ett närmevärde med tre gällande siffrors noggrannhet utgående från startvärdet $x_0 = 7$. (2)

Lösning: a) Vi använder produktregeln för derivera $f(x) = \ln x \sin^2 x = g(x)h(x)$, med $g(x) = \ln x$ och $h(x) = \sin^2 x$. Vi har att derivatan av $g(x) = \ln x$ är $g'(x) = 1/x$ och derivatan av $h(x) = \sin^2 x$ är enligt kedjeregeln

$$h'(x) = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x.$$

Enligt produktregeln är nu

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x + \ln x \cdot 2 \sin x \cos x.$$

b) Vi börjar med att derivera $g(x) = \frac{2x+8}{2x+3}$ för att hitta eventuella extrempunkter i intervallet. Enligt kvotregeln har vi

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(2x^2 + 8)'(2x + 3) - (2x^2 + 8)(2x + 3)'}{(2x + 3)^2} = \frac{4x(2x + 3) - (2x^2 + 8) \cdot 2}{(2x + 3)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 12x - 16}{(2x + 3)^2} = \frac{4(x^2 + 3x - 4)}{(2x + 3)^2}. \end{aligned}$$

En inre extrempunkt ges av ett nollställe till derivatan, som i det här fallet motsvarar ett nollställe hos täljaren, $4(x^2 + 3x - 4)$. Vi löser andragradsekvationen $x^2 + 3x - 4 = 0$ och får $x = -3/2 \pm \sqrt{(-3/2)^2 + 4} = -3/2 \pm 5/2$. Den ena roten, $x = -3$, ligger utanför det aktuella intervallet medan den andra $x = 1$ ligger i intervallet. Eftersom nämnaren bara är noll för $x = -3/2$ som ligger utanför intervallet är $x = 1$ den enda inre extrempunkten. Vi jämför värdena i intervallets ändpunkter,

$$g(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 8}{2 \cdot 0 + 3} = \frac{8}{3}$$

och

$$g(3) = \frac{2 \cdot 3^2 + 8}{2 \cdot 3 + 3} = \frac{26}{9}$$

med värdet i extrempunkten

$$g(1) = \frac{2 \cdot 1^2 + 8}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{10}{5} = 2$$

och ser att

$$2 < \frac{8}{3} < \frac{26}{9}$$

eftersom $18 < 24 < 26$.

Alltså är $g(1) = 2$ funktionens minimum och $g(3) = 26/9 \approx 2,89$ funktionens maximum på intervallet $0 \leq x \leq 3$. Funktionen är avtagande mellan 0 och 1 och sedan växande mellan 1 och 3. Grafen för funktionen ser ut som

c) Vi ser på funktionen $f(x) = x^2 - 57$ och använder Newton-Raphsons metod för att finna ett nollställe till denna. Vi behöver derivatan $f'(x) = 2x$ och får då iterationssteget

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - 57}{2x_i} = \frac{x_i^2 + 57}{2x_i}$$

Om vi startar med $x_0 = 7$ får vi

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 57}{2x_0} = \frac{49 + 57}{2 \cdot 7} = \frac{53}{7} \approx 7,57$$

och

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 57}{2x_1} = \frac{\frac{2809}{49} + 57}{2 \cdot \frac{53}{7}} = \frac{5602}{742} = \frac{2801}{371} \approx 7,55$$

När vi gör nästa justering kommer tredje decimalen inte att ändras eftersom

$$\frac{7,55^2 - 57}{2 \cdot 7,55} \approx 0,0002.$$

Svar:

- a) $f'(x) = (1/x) \sin^2 x + 2 \ln x \sin x \cos x$.
 - b) Maximum ges av $g(3) = 26/9$ och minimum av $g(1) = 2$.
 - c) $x = 7,55$ är en approximation av $\sqrt{57}$ med tre gällande siffror.
4. a) Använd en integral för att beräkna arean av området mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2x + 3$. **(3)**
- b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \sin 2x$ genom att använda partiell integration. **(3)**
- c) Bestäm volymen av den rotations kropp som bildas när kurvan $y = \tan x$ roterar kring x -axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. **(3)**

Lösning: a) Vi beräknar först skärningarna mellan kurvorna genom att lösa ekvationen $x^2 = 2x + 3$. Efter kvadratkomplettering har vi $(x - 1)^2 = 4$, vilket ger lösningarna $x = 1 \pm 2$. På intervallet mellan lösningarna är $2x + 3 \geq x^2$, vilket gör att arean mellan kurvorna ges av

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx &= \left[2\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3 \\ &= 3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{27}{3} - ((-1)^2 + 3 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}) \\ &= \frac{27 + 27 - 27 - 3 + 9 - 1}{3} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

b) Vi integrerar $\sin 2x$ och deriverar x^2 . I första steget får vi då

$$\int x^2 \sin 2x \, dx = x^2 \frac{(-\cos 2x)}{2} - \int 2x \cdot \frac{-\cos 2x}{2} \, dx$$

Vi behöver nu utföra ytterligare en partiell integration för att hantera den andra termen. Vi får

$$\int x \cos 2x \, dx = x \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \, dx = x \frac{\sin 2x}{2} - \frac{-\cos 2x}{4}$$

Sammantaget får vi alltså att

$$\int x^2 \sin 2x \, dx = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}$$

c) Volymen av rotationskroppen ges av integralen

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \pi y(x)^2 \, dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \pi \tan^2(x) \, dx$$

För att angripa denna integral kan vi använda substitutionen $t = \tan x$ som gör att gränserna förändras till $-1 \leq t \leq 1$. Eftersom derivatan av $\tan x$ ges av

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \left(\frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \right) = (1 + \tan^2 x)$$

får vi att skalan förändras enligt

$$dt = (\tan x)' \, dx = (1 + \tan^2 x) \, dx.$$

Alltså får vi att

$$\int_{-1}^1 \pi \, dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \pi (1 + \tan^2(x)) \, dx$$

och därmed

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \pi \tan^2(x) \, dx &= \int_{-1}^1 \pi \, dt - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \pi \, dx = [\pi t]_{-1}^1 - [\pi x]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \pi - (-\pi) - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} = 2\pi - \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Svar:

- a) Arean mellan kurvorna är $32/3$ areaenheter.
- b) $(1/4 - x^2/2) \cos 2x + (x/2) \sin 2x$ är en primitiv funktion till $x^2 \sin 2x$.
- c) Rotationsvolymen är $2\pi - \pi^2/2 (\approx 1,35)$ volymnsenheter.