5B1134 Matematik och modeller

6 oktober 2004

1 Första veckan — Geometri med trigonometri

Lösningsförslag till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 1.1 *Rita upp triangeln ABC med* $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$ *och* $C = (5, 1)$.

a) *Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen.(*Ledning*: För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.)* **(4)**

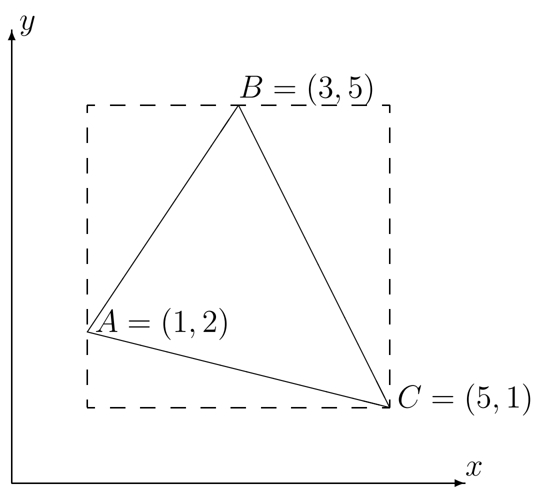
b) *En av vinklarna är nästan precis* $60°$. *Vilken är det, och är den större eller mindre än* $60°$*?* **(2)**

c) *Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna $y = kx$ *och* $y = \ell x$*, där* $k \geq 0$ *och* $\ell \geq 0$. **(3)**

Lösning:



Sidornas längder kan vi få från pythagoras sats genom att rita en rektangel (kvadrat) med sidor parallella med koordinataxlarna där triangelns hörn ligger på kanterna. Vi får på det sättet att

$$\begin{aligned}
|AB| &= \sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \\
|BC| &= \sqrt{(5-3)^2+(1-5)^2} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\
|AC| &= \sqrt{(5-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}
\end{aligned}$$

Arean av triangeln kan vi få genom att subtrahera de tre yttre rätvinkliga trianglarnas areor från kvadratens area.

$$A = 4^2 - \frac{1}{2}2\cdot 3 - \frac{1}{2}2\cdot 4 - \frac{1}{2}4\cdot 1 = 16-3-4-2 = 7.$$

Med hjälp av areasatsen som säger att

$$A = \frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\sin\alpha = \frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\sin\beta = \frac{1}{2}|BC|\cdot|AC|\sin\gamma$$

får vi nu att

$$\sin\alpha = \frac{2A}{|AB|\cdot|AC|} = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}},$$

$$\sin\beta = \frac{2A}{|AB|\cdot|BC|} = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{20}} = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$$

och

$$\sin\gamma = \frac{2A}{|BC|\cdot|AC|} = \frac{14}{\sqrt{20}\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$$

b) För att avgöra vilket av dessa värden som ligger närmast $\sin(60°)$ kan vi antingen räkna ut närmevärden med miniräknare, eller jämföra med det exakta värdet $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$. För vinklar mellan 0 och $90°$ växer sinus med vinkeln. Närmevärden ger

$$\sin\alpha \sim 0.94, \qquad \sin\beta \sim 0.87 \qquad \text{och} \qquad \sin\gamma \sim 0.76$$

och enligt tabellen ger det att vinklarna är ungefär $70°$, $60°$ och $50°$. Alltså ligger β nära $60°$. Vi kan nu jämföra de exakta värdena för $\sin\beta$ och $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$ genom att kvadrera dem eftersom båda är positiva. Vi får

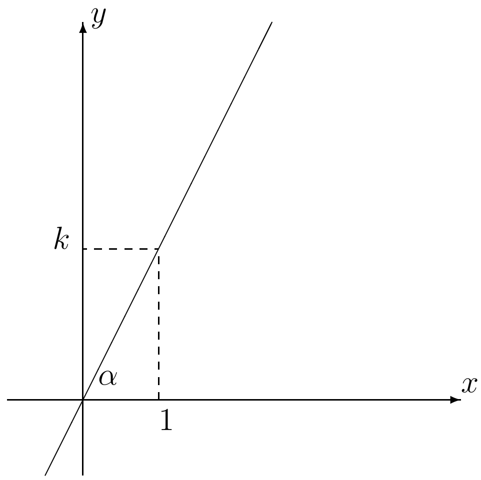
$$(\sin\beta)^2 = \frac{49}{13\cdot 5} = \frac{49}{65} \qquad \text{och} \qquad (\sin(60°))^2 = \frac{3}{4}.$$

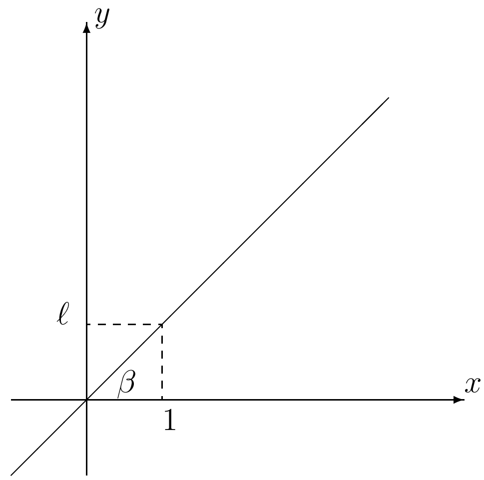
Vi ser nu att $(\sin\beta)^2 > (\sin(60°))^2$ och därmed också $\sin\beta > \sin(60°)$ eftersom

$$\frac{49}{65} > \frac{3}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{196}{260} > \frac{195}{260}.$$

Eftersom sinus växer med vinkeln mellan $0°$ och $90°$ är β större än $60°$.

c) Vi ser på vinklarna mellan linjerna och x-axeln, som vi kan kalla α respektive β.





Vi ser på det viset att

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \quad \text{och} \quad \sin\beta = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}.$$

Vinkeln mellan linjerna ges av $\alpha - \beta$, eller $\beta - \alpha$, men enligt subtraktionssatsen är

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta-\alpha)$$

och med våra värden blir nu

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\ell^2}} + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}} = \frac{1+k\ell}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+\ell^2}}$$

Svar:

a) $\sin\alpha = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$, $\sin\beta = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$ och $\sin\gamma = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$.

b) Vinkeln β ligger nära $60°$, men är lite större än $60°$.

c) Cosinus för vinkeln mellan linjerna ges av $(1+k\ell)/(\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+\ell^2})$.

Övning 1.2 *a) I en triangel ABC är sidan $c = |AB| = 5,1$ cm och sidan $a = |BC| = 6,7$ cm. Vinkeln vid A är $\alpha = 68°$. Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsatserna.* **(4)**

b) Två cirklar skär varandra i två punkter som ligger på avstånd $\sqrt{2}$ från varandra. Cirklarnas radier är 1 respektive $\sqrt{2}$. Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirklarna. **(5)**

Lösning: a) Sinussatsen säger att

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Vi kan ur detta lösa ut $\sin\gamma$ som

$$\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a} = \frac{5,1\sin 68^\circ}{6,7} \approx 0,706$$

Enligt tabellen får vi därför att $\gamma \approx 45^\circ$. Eftersom $\sin 180^\circ - x = \sin x$ skulle vi också kunna ha $\gamma \approx 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, men det är omöjligt eftersom $68^\circ + 125^\circ > 180^\circ$. Den tredje vinkeln måste därmed vara $\beta \approx 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 68^\circ - 45^\circ = 67^\circ$. Den sista sidan fås genom

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{6,7\sin 67^\circ}{0,927} \approx \frac{6,7\cdot 0,921}{0,927} \approx 6,7$$

b) Vi ritar först en figur:

Vi beräknar areorna av de två cirkelsegment som tillsammans bildar området som ligger i bägge cirklarna. Öppningsvinkeln i det mindre segmentet är 60°, dvs $\phi = \pi/3$ radianer, eftersom skärningspunkterna bildar en liksidig triangel tillsammans med centrum för den större cirkeln. Alltså är arean av cirkelsektorn

$$\phi\frac{\sqrt{2}^2}{2} = \frac{\pi\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{\pi}{3}.$$

För att få segmentets area måste vi dra bort arean av den liksidiga triangeln, dvs $1/2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\pi/3 = \sqrt{3}/2$, och vi får då $\pi/3 - \sqrt{3}/2$.

Det andra segmentet har en öppningsvinkel på $\psi = 90^\circ$, eftersom sidlängderna i triangeln som bildas av skärningspunkterna och centrum för den mindre cirkeln uppfyller Pythagoras sats $\sqrt{2}^2 = 1^2 + 1^2$. Arean av cirkelsektor blir därför

$$\psi\frac{1^2}{2} = \frac{\pi}{2\cdot 2} = \frac{\pi}{4}.$$

Vi drar bort triangelns area, dvs $1/2\cdot 1\cdot 1\sin\pi/2 = 1/2$ och får att arean av segmentet är $\pi/4 - 1/2$.

Den efterfrågade arean är summan av areorna av de två segmenten, dvs

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 0,467.$$

Svar:

a) Den tredje sidan är $6,7$ cm och vinklarna är $\beta \approx 67^\circ$ och $\gamma \approx 45^\circ$.

b) Arean av området som ligger i bägge cirklarna är $7\pi/12 - (\sqrt{3}+1)/2 \approx 0,467\mathrm{cm}^2$.

Övning 1.3 *a) En triangel har sidlängderna 4 cm, 5 cm och 6 cm. Bestäm samtliga vinklar och arean av triangeln.* **(5)**

b) *Vi får en rundad triangel från en liksidig triangel genom att sätta dit cirkelbågar med centrum i ett av hörnen och som går genom de andra två hörnen. Bestäm förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area?* **(4)**

Lösning: a) Vi kan använda oss av cosinussatsen för att bestämma vinklarna. Om sidlängderna är $a = 4$, $b = 5$ och $c = 6$ får vi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

vilket ger att

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.$$

På samma sätt får vi

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$$

och

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

Vi får nu vinklarna genom $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41°$, $\beta = \arccos(9/16) \approx 56°$ och $\gamma = \arccos(1/8) \approx 83°$.

För att bestämma arean, A, kan vi använda areasatsen som ger

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4} \approx 9,9$$

där vi använt att $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - 9/16} = \sqrt{7}/4$ enligt Pythagoras sats.

b) Vi börjar med att rita en figur.

Det som finns med i den rundade triangeln men inte i den ursprungliga är tre lika stora cirkelsegment. Om vi antar att triangeln har sidlängd r, har cirkelsegmenten radie r och öppningsvinkeln $\pi/3$ radianer. Motsvarande cirkelsektor har därför arean

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{6}$$

och triangeln har area

$$\frac{1}{2}r^2 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Eftersom cirkelsegmentets area är skillnaden mellan cirkelsektorns area och triangelns area får vi cirkelsegmentets area till

$$\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

Hela den rundade triangelns area är således

$$\frac{r^2\sqrt{3}}{4} + 3\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}r^2.$$

Förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area är

$$\frac{\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}r^2}{\frac{r^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 2 \approx 1,63$$

Svar:

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41°$, $\beta = \arccos(9/16) \approx 56°$, $\gamma = \arccos(1/8) \approx 83°$ och triangelns area är $15\sqrt{7}/4 \approx 9,9$ kvadratcentimeter.

b) Förhållandet mellan areorna är $2\pi/\sqrt{3} - 2 \approx 1,63$.

Övning 1.4 *a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 11 cm, 13 cm och 17 cm.* **(4)**

b) Hur stor del av en cirkels yta utgörs av en regelbunden sexhörning som har sina hörn på cirkelns rand? **(3)**

c) Hur lång omkrets har en regelbunden n-hörning i förhållande till den cirkel dess hörn ligger på? **(2)**

Lösning: a) Vi använder cosinussatsen för att bestämma vinklarna. Om sidorna är $a = 11$, $b = 13$ och $c = 17$ har vi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, vilket ger

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 17^2 - 11^2}{2 \cdot 13 \cdot 17} = \frac{337}{442}$$

På samma sätt får vi

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{11^2 + 17^2 - 13^2}{2 \cdot 11 \cdot 17} = \frac{241}{374}$$

och

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{11^2 + 13^2 - 17^2}{2 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{1}{286}$$

För att få vinklarna använder vi arccosinus, och får $\alpha \approx 40,3°$, $\beta \approx 49,9°$ och $\gamma \approx 89,8°$.
b) En regelbunden sexhörning kan fås genom att sätta samman sex liksidiga trianglar.

För att få reda på hur stor del av arean som sexhörningen upptar räcker det att se på en av de sex sektorerna. Om sidan i sexhörningen är r är arean av varje triangel $\frac{1}{2}r^2 \sin \pi/3 = r^2\sqrt{3}/4$. Arean av cirkelsektorn är $\pi r^2/6$. Alltså är andelen som sexhörningen upptar

$$\frac{r^2\sqrt{3}/4}{\pi r^2/6} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,83$$

c) Precis som i uppgift b) räcker det att se på en sektor i taget. När det gäller en regelbunden n-hörning kan den delas in i n likbenta trianglar och öppningsvinkeln i motsvarande sektor är $2\pi/n$. Båglängden på cirkelsektorn är $2\pi r/n$ och sidan är $2r \sin \pi/n$, vilket ger kvoten

$$\frac{2r \sin \pi/n}{2\pi r/n} = \frac{n \sin \pi/n}{\pi}$$

Svar:

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(337/442) \approx 40,3°$, $\beta = \arccos(241/374) \approx 49,9°$ och $\gamma = \arccos(1/286) \approx 89,8°$.

b) Andelen av arean är $3\sqrt{3}/2\pi \approx 0,83$.

c) Kvoten mellan omkretsarna är $(n/\pi) \sin \pi/n$.

Övning 1.5 *I triangeln ABC har sidan AB längd 7, sidan BC längd 5 och $\cos B = 1/7$.*

a) Bestäm exakta värden för längden av den tredje sidan och cosinus för de båda övriga vinklarna. **(5)**

b) Låt S vara centrum för en cirkel med som har alla triangelns hörn på periferin. Vi vet nu att vinkeln ASB är dubbelt så stor som vinkeln C enligt en känd sats. Enligt satsen för cosinus av dubbla vinkeln är $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$. Använd detta för att bestämma cirkelns radie. **(4)**

Lösning: Beteckna sidlängderna med $a = |BC|$, $b = |AC|$ och $c = |AB|$. a) Enligt cosinussatsen är $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, vilket i vårt fall ger

$$b^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} = 25 + 49 - 10 = 64.$$

Därmed är den tredje sidlängden $b = \sqrt{64} = 8$. Vi kan nu använda cosinussatsen igen för att bestämma $\cos A$ och $\cos C$ genom

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{88}{14 \cdot 8} = \frac{11}{14}$$

och

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{2 \cdot 40} = \frac{1}{2}.$$

b) Låt R vara den sökta radien. Enligt det givna sambandet får vi $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = 2/4 - 1 = -1/2$. Vi kan nu använda cosinussatsen på triangeln ASB som har två sidor av längd R och en sida av längd 7. Vi får

$$R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cos 2C = 7^2$$

vilket ger

$$R^2(2 - 2\frac{-1}{2}) = 7^2.$$

Alltså är

$$R^2 = \frac{49}{3}$$

och $R = \sqrt{49/3} = 7/\sqrt{3}$.
Svar:

a) Den tredje sidans längd är $b = 8$ och cosinus för de övriga vinklarna är $\cos A = 11/14$ och $\cos C = 1/2$.

b) Radien för cirkeln är $R = 7/\sqrt{3}$.