5B1134 Matematik och modeller

3 september 2004

1 Första veckan — Geometri med trigonometri

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina med svar.

Övning 1.1 [5B1134:Modell:1] *Rita upp triangeln ABC med* $A = (1,3)$*,* $B = (2,4)$ *och* $C = (5,1)$.

a) Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. **(4)**

b) Avgör vilken av vinklarna som är störst. **(2)**

c) Låt C *röra sig efter linjen* $x = 5$ *och bestäm ett villkor på* C *för att vinkeln* B *skall vara den största i triangeln.* **(3)**

Svar: a) $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = 0$ och $\cos\gamma = 3/\sqrt{10}$. b) Vinkeln vid B är störst. c) Vinkeln vid B är störst om C ligger ovanför x-axeln.

Övning 1.2 [5B1134:KS:1:2003] *Rita upp triangeln ABC med* $A = (1,2)$*,* $B = (3,5)$ *och* $C = (5,1)$.

*a) Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen.(*Ledning*: För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.)* **(4)**

b) En av vinklarna är nästan precis $60°$*. Vilken är det, och är den större eller mindre än* $60°$*?* **(2)**

c) Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna $y = kx$ *och* $y = \ell x$*, där* $k \geq 0$ *och* $\ell \geq 0$. **(3)**

Svar: a) $\sin\alpha = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$, $\sin\beta = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$ och $\sin\gamma = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$. b) Vinkeln β ligger nära $60°$, men är lite större än $60°$. c) Cosinus för vinkeln mellan linjerna ges av $(1+k\ell)/(\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+\ell^2})$.

Övning 1.3 [5B1134:Tentamen:031013:1]

a) I en triangel ABC är sidan $c = |AB| = 5,1$ cm och sidan $a = |BC| = 6,7$ cm. Vinkeln vid A är $\alpha = 68°$. Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsatserna. **(4)**

b) Två cirklar skär varandra i två punkter som ligger på avstånd $\sqrt{2}$ från varandra. Cirklarnas radier är 1 respektive $\sqrt{2}$. Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirklarna. **(5)**

Svar:

a) Den tredje sidan är $6,7$ cm och vinklarna är $\beta \approx 67°$ och $\gamma \approx 45°$.

b) Arean av området som ligger i bägge cirklarna är $7\pi/12 - (\sqrt{3}+1)/2 \approx 0,467\mathrm{cm}^2$.

Övning 1.4 [5B1134:Tentamen:031103:1]

a) En triangel har sidlängderna 4 cm, 5 cm och 6 cm. Bestäm samtliga vinklar och arean av triangeln. **(5)**

b) Vi får en rundad triangel från en liksidig triangel genom att sätta dit cirkelbågar med centrum i ett av hörnen och som går genom de andra två hörnen. Bestäm förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area? **(4)**

Svar:

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41°$, $\beta = \arccos(9/16) \approx 56°$, $\gamma = \arccos(1/8) \approx 83°$ och triangelns area är $15\sqrt{7}/4 \approx 9,9$ kvadratcentimeter.

b) Förhållandet mellan areorna är $2\pi/\sqrt{3} - 2 \approx 1,63$.

Övning 1.5 [5B1134:Tentamen:040109:1]

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 11 cm, 13 cm och 17 cm. **(4)**

b) Hur stor del av en cirkels yta utgörs av en regelbunden sexhörning som har sina hörn på cirkelns rand? **(3)**

c) Hur lång omkrets har en regelbunden n-hörning i förhållande till den cirkel dess hörn ligger på? **(2)**

Svar:

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(337/442) \approx 40,3°$, $\beta = \arccos(241/374) \approx 49,9°$ och $\gamma = \arccos(1/286) \approx 89,8°$.

b) Andelen av arean är $3\sqrt{3}/2\pi \approx 0,83$.

c) Kvoten mellan omkretsarna är $(n/\pi)\sin \pi/n$.

Övning 1.6 [5B1134:Tentamen:040821:1] *I triangeln ABC har sidan AB längd 7, sidan BC längd 5 och $\cos B = 1/7$.*

a) Bestäm exakta värden för längden av den tredje sidan och cosinus för de båda övriga vinklarna. **(5)**

b) Låt S vara centrum för en cirkel med som har alla triangelns hörn på periferin. Vi vet nu att vinkeln ASB är dubbelt så stor som vinkeln C enligt en känd sats. Enligt satsen för cosinus av dubbla vinkeln är $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$. Använd detta för att bestämma cirkelns radie. **(4)**

Svar:

a) Den tredje sidans längd är $b = 8$ och cosinus för de övriga vinklarna är $\cos A = 11/14$ och $\cos C = 1/2$.

b) Radien för cirkeln är $R = 7/\sqrt{3}$.