5B1134 Matematik och modeller

8 september 2004

2 Andra veckan — Trigonometri

Veckans begrepp

- enhetscirkeln, trigonometriska ettan
- trigonometrisk funktion, sinuskurva
- period, fasförskjutning, vinkelhastighet
- trigonometrisk ekvation
- additionssatserna, formler för dubbla och halva vinkeln.

Frågor att besvara

- Hur definieras de trigonometriska funktionerna?
- Hur beräknas de trigonometriska funktionerna?
- Vilka grundläggande egenskaper har de och hur härleder man andra egenskaper från dem?
- Vad är en trigonometrisk ekvation och vilka typer av trigonometriska ekvatoiner kan vi lösa?

Problem att arbeta med

Här följer några uppgifter som har med andra veckans material att göra.

Övning 2.1 *a) Härled ett uttryck för* $\sin 3x$ *i* $\cos x$ *och* $\sin x$.

b) Använd trigonometriska ettan för att skriva $\sin 3x$ *som ett polynom i* $\sin x$.

c) Visa att tredelning av en vinkel är samma sak som att lösa en tredjegradsekvation.

d) Kan $\sin nx$ *alltid uttryckas som ett polynom i* $\sin x$*?*

Övning 2.2 *Använd trigonometri för att komma fram till hur den infallande strålen med lutning* k *speglas i linjen* $y = \ell x$*.*

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 2.3 [5B1134:Modell:2]

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(3\pi x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(4)

b) I en triangel är cosinus för två av vinklarna $1/4$*, respektive* $1/2$*. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln.* **(3)**

c) Om $\cos\alpha = 1/4$ *och* $\cos\beta = x$*, vad är det då för villkor på* x *för att triangeln har två vinklar som är lika?* **(2)**

Övning 2.4 [5B1134:KS:2:2003]

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$*.* **(4)**

b) Skriv om $5\sin\omega t - 12\cos\omega t$ *på formen* $A\sin(\omega t + \phi)$*.* **(3)**

c) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + c$$

där a*,* b *och* c *är reella konstanter.* **(2)**

Övning 2.5 [5B1134:Tentamen:031013:2]

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin 4x = \cos 5x.$$

(3)

b) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4)

c) *Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för* $\sin \pi/12$. **(2)**

Övning 2.6 [5B1134:Tentamen:031103:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\tan 2x = \sqrt{3}.$$

(3)

b) *För att bestämma extremvärdena för funktionen* $f(x) = \sin 2x \cos x$ *leds man till att finna nollställena till derivatan* $g(x) = f'(x) = 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$. *Förenkla uttrycket för* $g(x)$ *och bestäm alla lösningar till den trigonometriska ekvationen* $g(x) = 0$. **(4)**

c) *Härled formeln*

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

med hjälp av någon av additionsformlerna. **(2)**

Övning 2.7 [5B1134:Tentamen:040109:2]

a) *Skriv om* $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ *på formen* $A\sin(x+\phi)$. **(3)**

b) *Använd resultatet från a) för att bestämma samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

(4)

c) *Härled, med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan, formeln för* $\sin(x/2)$ *uttryckt i* $\cos x$. **(2)**

Övning 2.8 [5B1134:Tentamen:040821:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen* **(4)**

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) *Använd additionsformlerna och trigonometriska ettan för att skriva om* $\sin 3x$ *som ett polynom i* $\sin x$ *och* $\cos 3x$ *som polynom i* $\cos x$. **(5)**

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

2.3 *a)* $x = 2/9 + n/3$, *där* n *är ett heltal.*

b) Cosinus för den tredje vinkeln är $(3\sqrt{5} - 1)/8$.

c) $x = 1/4$ *eller* $x = \sqrt{6}/4$.

2.4 *a) Samtliga lösningar ges av* $t = \pm 1/150 + n/50$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t = 13 \sin(\omega t + \phi)$ *där* $\phi = \arctan(-12/5) \approx -1,18$.

c) Det största värdet är $c + \sqrt{a^2 + b^2}$ *och det minsta är* $c - \sqrt{a^2 + b^2}$.

2.5 *a) Lösningarna är* $x = \pi(1 - 4n)/18$ *och* $x = \pi(4n - 1)/2$ *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) Lösningarna är $x = (-3 \pm 4)\pi/12 + 2\pi n$ *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

c) Ett exakt värde är $\sin(\pi/12) = (\sqrt{2 - \sqrt{3}})/2$.

2.6 *a) Lösningarna är* $x = \pi/6 + n\pi/2$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) Vi kan skriva $g(x) = 2 \cos x(\cos^2 x - 2 \sin^2 x)$ *och lösningarna är* $x = \pi/2 + n\pi$, *och* $x = \pm \arctan(\sqrt{2}/2) + n\pi \approx \pm 0,62 + n\pi$ *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

2.7 *a)* $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \pi/3)$.

b) Lösningarna är $x = 7\pi/12 + 2\pi n$ *och* $x = 13\pi/12 + 2\pi n$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

c) $\sin(x/2) = \pm\sqrt{(1 - \cos x)/2}$, *med positivt tecken om* $4\pi n \leq x \leq 4\pi n + 2\pi$ *för något heltal* n, *annars negativt.*

2.8 *a) Lösningarna är* $x = \pi/3 + 2\pi n/3$ *och* $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) Vi får att $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ *och* $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.