5B1134 Matematik och modeller

6 oktober 2004

2 Andra veckan — Trigonometri

Lösningsförslag till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 2.1 *a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$. **(4)**

b) Skriv om $5\sin\omega t - 12\cos\omega t$ *på formen* $A\sin(\omega t + \phi)$. **(3)**

c) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + c$$

där a, b *och* c *är reella konstanter.* **(2)**

Lösning: Vi kan börja med att skriva om $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos(\pi/2 - (\omega t + \pi/2)) = \cos(-\omega t) = \cos(\omega t)$. Därmed kan ekvationen också skrivas som

$$\cos(100\pi t) = -\frac{1}{2}.$$

Eftersom $\cos x$ antar värdet $-1/2$ för $x = 2\pi/3$ och $x = -2\pi/3$ i intervallet $-\pi < x \leq \pi$ får vi att samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

ges av

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \qquad \text{och} \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

där n är ett godtyckligt heltal. Sätter vi in $x = \omega t = 100\pi t$ i dessa får vi

$$100\pi t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \qquad \text{och} \qquad 100\pi t = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

vilket kan skrivas som

$$t = \frac{1}{150} + \frac{n}{50} \qquad \text{och} \qquad t = -\frac{1}{150} + \frac{n}{50}.$$

b) Vi vill försöka skriva $5\sin\omega t - 12\cos\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$. Om vi använder additionssatsen för sinus får vi att

$$A\sin(\omega t + \phi) = A\sin(\omega t)\cos\phi + A\cos(\omega t)\sin\phi$$

Vi beöver därför ha

$$\begin{cases} A\cos\phi &= 5 \\ A\sin\phi &= -12 \end{cases}$$

Om vi kvadrerar bägge ekvationerna och lägger ihop får vi

$$A^2\cos^2\phi + A^2\sin^2\phi = 5^2 + 12^2 = 169$$

som enligt trigonometriska ettan betyder att $A^2 = 169 = 13^2$. Därmed kan vi välja $A = 13$. Sätter vi in detta i ekvationerna igen får vi

$$\begin{cases} \cos\phi &= 5/13 \\ \sin\phi &= -12/13 \end{cases}$$

och vi får nu $\tan\phi = \sin\phi/\cos\phi = -12/5$. Vi kan se att ϕ ska ligga i fjärde kvadranten eftersom sinus är negativt och cosinus är positivt. Alltså kan vi skriva

$$5\sin\omega t - 12\sin\omega t = 13\sin(\omega t + \phi)$$

där $\phi = \arctan(-12/5)$ ($\approx -1,18$, enligt tabell.)

c) Vi kan precis som i uppgift b) skriva $a\sin x + b\cos x + c = A\sin(x + \phi) + c$. Med hjälp av additionsformeln får vi igen att

$$A\sin(x + \phi) = A\sin x\cos\phi + A\cos x\sin\phi$$

och vi får då att

$$\begin{cases} A\cos\phi &= a \\ A\sin\phi &= b \end{cases}$$

vilket på samma sätt som tidigare ger

$$A^2 = a^2 + b^2.$$

Eftersom $\sin(x + \phi)$ varierar mellan $+1$ och -1 kommer $a\sin x + b\cos x + c$ att variera mellan $\sqrt{a^2 + b^2} + c$ och $-\sqrt{a^2 + b^2} + c$.

Svar:

a) Samtliga lösningar ges av $t = \pm 1/150 + n/50$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) $5\sin\omega t - 12\cos\omega t = 13\sin(\omega t + \phi)$ där $\phi = \arctan(-12/5) \approx -1,18$.

c) Det största värdet är $c + \sqrt{a^2+b^2}$ och det minsta är $c - \sqrt{a^2+b^2}$.

Övning 2.2 *a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin 4x = \cos 5x.$$

(3)

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4)

c) Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för $\sin \pi/12$. **(2)**

Lösning: a) Vi kan skriva om vänsterledet som $\cos(\pi/2 - 4x)$, och eftersom $\cos a = \cos b$, precis om $a = b + 2\pi n$, eller $a = -b + 2\pi n$, för något heltal n får vi på så sätt att lösningen till

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \cos 5x$$

ges av lösningarna till ekvationerna

$$\frac{\pi}{2} - 4x = 5x + 2\pi n \qquad \text{och} \qquad \frac{\pi}{2} - 4x = -5x + 2\pi n.$$

Den första av dessa har lösningarna

$$x = \frac{\pi - 4\pi n}{2 \cdot 9} = \frac{\pi(1-4n)}{18}$$

och den andra har lösningarna

$$x = \frac{-\pi + 4\pi n}{2} = \frac{\pi(4n-1)}{2}$$

där n i båda fallen är ett godtyckligt heltal.

b) Vi börjar med att skriva om $\cos x - \sin x$ på formen $A\cos(x+\phi)$. När vi använder additionssatsen på det senare får vi $A\cos x \cos\phi - A\sin x \sin\phi$, och likställer vi dessa uttryck får vi ekvationerna

$$\begin{cases} A\cos\phi &= 1, \\ A\sin\phi &= 1. \end{cases}$$

Genom att kvadrera och addera dessa två ekvationer får vi $A^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = A^2 = 2$, dvs vi kan välja $A = \sqrt{2}$. Vi får då att $\cos\phi = \sin\phi = 1/\sqrt{2}$, och vi kan välja $\phi = \pi/4$. Alltså kan vi skriva ekvationen som

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

eller

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $\cos a = 1/2$ för $a = \pm\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal får vi

$$x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

vilket kan skrivas som

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{(-3 \pm 4)\pi}{12} + 2\pi n.$$

c) Formeln för cosinus av dubbla vinkeln kan vi få från additionssatsen genom

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Enligt trigonometriska ettan kan vi dessutom skriva $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. Om vi nu låter $x = \pi/12$ har vi att $2x = \pi/6$ och vi känner till det exakta värdet för $\cos \Pi/6$, nämligen $\sqrt{3}/2$. För att få reda på $\sin\pi/12 = \sin x$ behöver vi lösa ekvationen

$$1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi kan skriva om den som

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

och genom att dra roten ur detta får vi

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

eftersom vi vet att $\sin(\pi/12)$ är positivt.
Svar:

a) Lösningarna är $x = \pi(1 - 4n)/18$ och $x = \pi(4n - 1)/2$ där n är ett godtyckligt heltal.

b) Lösningarna är $x = (-3 \pm 4)\pi/12 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal.

c) Ett exakt värde är $\sin(\pi/12) = (\sqrt{2 - \sqrt{3}})/2$.

Övning 2.3 *a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\tan 2x = \sqrt{3}.$$

(3)

b) För att bestämma extremvärdena för funktionen $f(x) = \sin 2x \cos x$ leds man till att finna nollställena till derivatan $g(x) = f'(x) = 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$. Förenkla uttrycket för $g(x)$ och bestäm alla lösningar till den trigonometriska ekvationen $g(x) = 0$. **(4)**

c) Härled formeln

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

med hjälp av någon av additionsformlerna. **(2)**

Lösning: a) Eftersom $\tan x$ är periodisk med period π får vi att $\tan 2x$ är periodisk med period $\pi/2$. För $-\pi/2 < x < \pi/2$ antar $\tan x$ varje värde precis en gång, och $\tan \pi/3 = \sqrt{3}$. Vi får därför att samtliga lösningar till ekvationen ges av

$$2x = \pi/3 + n\pi$$

eller $x = \pi/6 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi får använda oss av formlerna för dubbla vinkeln, dvs

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x\\ \sin 2x &= \sin(x+x) = \sin x\cos x + \cos x \sin x = 2\sin x\cos x\end{aligned}$$

När vi sätter in dessa i uttrycket för $g(x)$ får vi

$$g(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x = 2\cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x).$$

Vi ser nu att $g(x) = 0$ precis om antingen $\cos x = 0$, dvs om $x = \pi/2 + n\pi$, eller om $\cos^2 x - 2\sin^2 x = 0$. Det senare kan skrivas om som $\tan^2 x = 1/2$, eftersom vi kan utgå från att $\cos x$ inte är noll. Alltså blir lösningarna för den andra delen att $\tan = \pm 1/\sqrt{2}$, vilket betyder $x = \pm\arctan 1/\sqrt{2} + n\pi$.

c) Vi kan använda oss av att $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$ och att

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

Svar:

a) Lösningarna är $x = \pi/6 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi kan skriva $g(x) = 2\cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x)$ och lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$, och $x = \pm\arctan(\sqrt{2}/2) + n\pi \approx \pm 0,62 + n\pi$ där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.4 *a) Skriv om* $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ *på formen* $A\sin(x+\phi)$. **(3)**

b) Använd resultatet från a) för att bestämma samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

(4)

c) Härled, med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan, formeln för $\sin(x/2)$ *uttryckt i* $\cos x$. **(2)**

Lösning: a) För att skriva $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ som $A\sin(x+\phi)$ ser vi på hur additionsformeln för sinus fungerar. Vi får

$$A\sin(x+\phi) = A\sin x\cos\phi + A\cos x\sin\phi$$

och därmed skulle vi behöva ha

$$\begin{cases} A\cos\phi & = & 1, \\ A\sin\phi & = & -\sqrt{3}. \end{cases}$$

På grund av den trigonometriska ettan får vi $A^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$, och vi kan välja $A = 2$. Då får vi

$$\begin{cases} \cos\phi & = & 1/2, \\ \sin\phi & = & -\sqrt{3}/2. \end{cases}$$

vilket är uppfyllt för $\phi = -\pi/3$. Därmed kan vi skriva $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ som $2\sin(x - \pi/3)$.

b) Vi skriver nu om ekvationen som

$$2\sin(x - \pi/3) = \sqrt{2}$$

vilket är detsamma som

$$\sin(x - \pi/3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Eftersom sinusfunktionen antar värdet $\sqrt{2}/2$ för $\pi/4 + 2\pi n$ och $3\pi/4 + 2\pi n$ får vi lösningarna genom

$$x - \pi/3 = \pi/4 + 2\pi n$$

och

$$x - \pi/3 = 3\pi/4 + 2\pi n.$$

Detta ger

$$x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$$

och
$$x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi n$$
där n är ett godtyckligt heltal.

c) Eftersom additionsformeln för cosinus tillsammans med trigonometriska ettan ger
$$\cos(2y) = \cos(y+y) = \cos^2 y - \sin^2 y = 1 - 2\sin^2 y$$
kan vi skriva
$$\sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2}$$
och med $y = x/2$ får vi
$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}.$$
När vi drar roten ur detta får vi alltid något icke-negativt. Eftersom $\sin x/2 \geq 0$ för $0 \leq x \leq 2\pi$ och $\sin x \leq 0$ för $2\pi \leq x \leq 4\pi$, får vi
$$\sin\frac{x}{2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} & \text{om } 0 \leq x - 4\pi n \leq 2\pi \text{ för något heltal } n, \\ -\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} & \text{om } 2\pi \leq x - 4\pi n \leq 4\pi \text{ för något heltal } n. \end{cases}$$

Svar:

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x - \pi/3)$.

b) Lösningarna är $x = 7\pi/12 + 2\pi n$ och $x = 13\pi/12 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

c) $\sin(x/2) = \pm\sqrt{(1-\cos x)/2}$, med positivt tecken om $4\pi n \leq x \leq 4\pi n + 2\pi$ för något heltal n, annars negativt.

Övning 2.5 *a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen* **(4)**
$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Använd additionsformlerna och trigonometriska ettan för att skriva om $\sin 3x$ *som ett polynom i* $\sin x$ *och* $\cos 3x$ *som polynom i* $\cos x$. **(5)**

Lösning: a) Om $0 \leq y \leq 2\pi$ och $\cos y = -1/\sqrt{2}$ måste $y = 3\pi/4$ eller $y = 5\pi/4$. Alltså finns enbart lösningar om
$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$
eller
$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

där n är ett godtyckligt heltal. När vi löser ut x ur dessa ekvationer får vi

$$x = \frac{\pi + 2\pi n}{3} \qquad \text{eller} \qquad x = \frac{3\pi + 4\pi n}{6}.$$

b) Vi använder oss först av additionsformlerna för att skriva om $\sin 2x$ och $\cos 2x$. Vi får $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$ och $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, vilket med hjälp av trigonometriska ettan kan skrivas som $2\cos^2 x - 1$ eller $1 - 2\sin^2 x$.

Vi börjar med $\sin 3x$ och får

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\
&= (2 \sin x \cos x) \cos x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \\
&= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x
\end{aligned}$$

som är ett polynom i $\sin x$. På liknande sätt får vi med $\cos 3x$ att

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1) \cos x + (2 \sin x \cos x) \sin x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 4\cos^3 x - 3 \cos x.
\end{aligned}$$

Svar:

a) Lösningarna är $x = \pi/3 + 2\pi n/3$ och $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi får att $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ och $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.