5B1134 Matematik och modeller

20 september 2004

4 Fjärde veckan — Derivator med tillämpningar

Veckans begrepp

- optimering, extrempunkter, lokala maxima och minima
- Newton-Raphsons metod för numerisk ekvationslösning
- feluppskattning med hjälp av derivata
- primitiva funktioner

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 4.1 [5B1134:Modell:3] *Låt* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *vara den funktion som ges av* $f(x) = (2\cos x + 1)^4$*, för alla reella tal* x*.*

a) *Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera* f*.* **(3)**

b) *Bestäm maximum och minimum för funktionen* f *på intervallet* $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$*.* **(4)**

c) *Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till* $h = g^n$ *då* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *är en given funktion och* n *är ett positivt heltal.* **(2)**

Övning 4.2 [5B1134:KS:3:2003] *Betrakta funktionen*

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

a) *Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av* $f(x)$*. Förenkla uttrycket så långt som möjligt.* **(3)**

b) *Skissera grafen för* $f(x)$ *på intervallet* $0 \le x \le \pi$ *och bestäm maximum och minimum av* $f(x)$ *på samma intervall.* **(4)**

c) *Funktionen $y = f(x)$ är lösningen till en* differentialekvation

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Bestäm konstanterna a och b. **(2)**

Övning 4.3 [5B1134:Tentamen:031013:3] *Betrakta funktionen $f(x) = \sin x + 2\cos^2 x$.*

a) *Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen $f(x)$.* **(3)**

b) *Bestäm närmevärden till maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ med två gällande siffror.* **(4)**

c) *Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen $f(x)$.* **(2)**

Övning 4.4 [5B1134:Tentamen:031103:3] *Betrakta funktionen $f(x) = x(3-x)e^{-x/2}$.*

a) *Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används.* **(4)**

b) *Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 10$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall.* **(5)**

Övning 4.5 [5B1134:Tentamen:040109:3] *Betrakta funktionen $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$.*

a) *Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används.* **(4)**

b) *Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall.* **(5)**

Övning 4.6 [5B1134:Tentamen:040821:3]

a) *Derivera funktionen $f(x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x$. (Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används.)* **(2)**

b) *Derivera funktionen $g(x) = \cos 2x \sin 3x$.* **(2)**

c) *Bestäm ett värde på konstanten a så att funktionen $h(x) = e^{ax}\sin^2 x$ får ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$.* **(5)**

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

4.3 *a)* $f'(x) = -4\sin x(\cos x + 1)^3$.

b) *Maximum är* 1 *och minimum är* 0.

c) *Genom att se på nollställena till* $g'(x)$ *och* $g(x)$*, samt ändpunkterna på intervallet.*

4.4 *a)* $f'(x) = 2e^{-x}\cos x$.

b) *Maximum är* $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} \approx 0,21$ *och minimum är* $f(0) = -1$.

c) *Konstanterna ges av* $a = b = 2$ *och* $y = f(x)$ *är en lösning till* $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4.5 *a)* *Derivatan av* $f(x)$ *är* $f'(x) = \cos x - 4\cos x \sin x$.

b) *Maximum av* $f(x)$ *är* $2,1$ *och minimum* $-1,0$*, på intervallet* $0 \leq x \leq 2\pi$.

c) *De exakta värdena för maximum och minimum är* $17/8$*, respektive* -1.

4.6 *a)* *Derivatan av* $f(x)$ *är* $f'(x) = (6 - 7x + x^2)e^{-x/2}/2$.

b) *Maximum av* $f(x)$ *är* $2e^{-1/2} \approx 1,2$ *och minimum är* $-18e^{-3} \approx -0,90$.

4.7 *a)* *Derivatan av* $f(x)$ *är* $f'(x) = (2x^2 - 1)e^{2x}$.

b) *Maximum av* $f(x)$ *är* $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 0,29$ *och minimum är* $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -0,85$.

4.8 *a)* *Derivatan av* $f(x)$ *är* $f'(x) = -32\cos^3 x \sin x + 16\cos x \sin x$.

b) *Derivatan av* $g(x)$ *är* $g'(x) = -2\sin 2x \sin 3x + 3\cos 2x \cos 3x$.

c) *Funktionen har ett lokalt maximum i punkten* $x = \pi/3$ *om* $a = -2\sqrt{3}$.