5B1134 Matematik och modeller

21 september 2004

4 Fjärde veckan — Derivator med tillämpningar

Lösningsförslag till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 4.1 *Betrakta funktionen*

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

a) *Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av $f(x)$. Förenkla uttrycket så långt som möjligt.* **(3)**

b) *Skissera grafen för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ och bestäm maximum och minimum av $f(x)$ på samma intervall.* **(4)**

c) *Funktionen $y = f(x)$ är lösningen till en* differentialekvation

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Bestäm konstanterna a och b. **(2)**

Lösning: Deriveringsregeln för en kvot säger att om $f(x) = g(x)/h(x)$ och $g(x)$ och $h(x)$ är deriverbara så är $f(x)$ deriverbar med derivata

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}.$$

I vårt fall har vi $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$ och $h(x) = e^x$. Eftersom båda dessa är deriverbara med $g'(x) = \cos(x) + \sin x$ och $h'(x) = e^x$ får vi

$$f'(x) = \frac{(\cos x + \sin x)(e^x) - (\sin x - \cos x)(e^x)}{e^{2x}} = \frac{2\cos x}{e^x} = 2e^{-x}\cos x.$$

b) För att finna maximum och minimum på intervallet undersöker vi intervallets ändpunkter och nollställena hos derivatan $f'(x)$. För $x = 0$ får vi

$$f(0) = (\sin 0 - \cos 0)/e^0 = (0 - 1)/1 = -1.$$

För $x = \pi$ får vi

$$f(\pi) = (\sin \pi - \cos \pi)/e^{\pi} = (0 - (-1))e^{-\pi} = e^{-\pi}.$$

Nollställena för derivatan $f'(x)$ ges enligt a) lösningarna till ekvationen

$$2e^{-x} \cos x = 0$$

Eftersom e^{-x} aldrig kan vara noll, och $\cos x = 0$ precis för $x = \pi/2$ i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ får vi att det enda nollstället vi behöver betrakta är $x = \pi/2$. För $x = \pi/2$ har vi

$$f(\pi/2) = (\sin(\pi/2) - \cos(\pi/2))/e^{\pi/2} = (1 - 0)e^{-\pi/2} = e^{-\pi/2}.$$

Eftersom e^{-x} är en avtagande funktion är $e^{-\pi/2} \geq e^{-\pi}$ och därmed är $e^{-\pi/2}$ funktionens maximum på intervallet. Funktionens minimum ges av -1 eftersom de andra två värdena var positiva. Grafen för funktionen ges av

c) Vi har redan räknat ut $f'(x)$, men behöver fortsätta med

$$f''(x) = (2e^{-x} \cos x)' = -2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x = -2e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

Om vi nu sätter in $y = f(x)$ i $y'' + ay' + by = 0$ får vi

$$-2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2ae^{-x} \cos x + be^{-x}(\sin x - \cos x) = 0$$

och eftersom e^{-x} inte kan vara noll kan vi dividera med det och få

$$-2 \cos x - 2 \sin x + 2a \cos x + b \sin x - b \cos x = 0.$$

Om vi samlar ihop sinus och cosinus för sig blir det

$$(b - 2) \sin x + (2a - b - 2) \cos x = 0.$$

Om vi nu sätter in $x = \pi/2$ får vi att $b = 2$ och sätter vi in $x = 0$ får vi $a = (b + 2)/2 = (2+2)/2 = 2$. Eftersom hela vänsterledet då blir noll är $f(x)$ en lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Svar:

a) $f'(x) = 2e^{-x} \cos x$.

b) Maximum är $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} \approx 0,21$ och minimum är $f(0) = -1$.

c) Konstanterna ges av $a = b = 2$ och $y = f(x)$ är en lösning till $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Övning 4.2 *Betrakta funktionen* $f(x) = \sin x + 2 \cos^2 x$.

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. **(3)**

b) Bestäm närmevärden till maximum och minimum för $f(x)$ *på intervallet* $0 \leq x \leq 2\pi$ *med två gällande siffror.* **(4)**

c) Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen $f(x)$. **(2)**

Lösning: a) Kedjeregeln säger att derivatan av en sammansättning av funktioner, $F(x) = h(g(x))$, ges av

$$F'(x) = h'(g(x))g'(x).$$

I vårt fall behöver vi använda kedjeregeln på termen $\cos^2 x$ som är sammansättningen av $h(x) = x^2$ och $g(x) = \cos(x)$. Eftersom derivatan av $h(x)$ är $h'(x) = 2x$ och derivatan av $g(x)$ är $g'(x) = -\sin x$ får vi att derivatan av $\cos^2 x$ är

$$2(\cos x)(-\sin x) = -2\cos x \sin x$$

och derivatan av $f(x)$ blir därmed

$$f'(x) = \cos x + 2(-2\cos x \sin x) = \cos x - 4\cos x \sin x.$$

b) För att finna maximum och minimum på intervallet behöver vi se på intervallets ändpunkter och nollställena till derivatan. (Funktionen har en derivata i alla punkter.) Ändpunkterna är $x = 0$ och $x = 2\pi$ och funktionen antar samma värde i dessa punkter eftersom både sinus och cosinus är periodiska med period 2π. Vi får $f(0) = f(2\pi) = \sin 0 + 2\cos^2 0 = 2$.

Nollställena till derivatan får vi genom att lösa ekvationen $f'(x) = 0$, dvs

$$\cos x - 4\cos x \sin x = 0.$$

Vi kan faktorisera den som

$$\cos x(1 - 4\sin x) = 0$$

och ser att vi har lösningar om $\cos x = 0$ eller $1 - 4\sin x = 0$. Det första händer precis då $x = \pi/2$, eller $x = 3\pi/2$, och vi får i dessa fall att

$$f(\pi/2) = \sin \pi/2 + 2\cos^2 \pi/2 = 1 + 2 \cdot 0^2 = 1$$

respektive

$$f(3\pi/2) = \sin 3\pi/2 + 2\cos^2 3\pi/2 = -1 + 2 \cdot 0^2 = -1.$$

Det andra händer då

$$\sin x = 1/4.$$

För att finna närmevärden kan vi se i tabellen att detta inträffar då $x \approx 0,25$. Eftersom $\sin x = \sin(\pi - x)$ händer det också när $x \approx 2,89$. Vi får då

$$f(0,25) = \sin 0,25 + 2\cos^2 0,25 \approx 0,25 + 2 \cdot 0.97^2 \approx 2,1$$

Eftersom $2,1$ är det största av de fyra värdena vi beräknat är det maximum på intervallet. Det minsta värdet av de fyra är -1, vilket ger minimum av funktionen.

c) Om $\sin x = 1/4$ får vi enligt trigonometriska ettan att

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{16-1}{16} = \frac{15}{16}$$

och därmed är

$$f(x) = \sin x + 2\cos^2 x = \frac{1}{4} + 2\frac{15}{16} = \frac{2+15}{8} = \frac{17}{8},$$

vilket ger ett exakt värde för maximum. Minimum är redan angivet exakt i b).
Svar:

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = \cos x - 4\cos x \sin x$.

b) Maximum av $f(x)$ är $2,1$ och minimum $-1,0$, på intervallet $0 \le x \le 2\pi$.

c) De exakta värdena för maximum och minimum är $17/8$, respektive -1.

Övning 4.3 *Betrakta funktionen* $f(x) = x(3-x)e^{-x/2}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. **(4)**

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \le x \le 10$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. **(5)**

Lösning: a) Vi börjar med att skriva $f(x) = (3x - x^2)e^{-x/2} = g(x)h(x)$, där $g(x) = 3x - x^2$ och $h(x) = e^{-x/2}$, och använder produktregeln för att få $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$.

Vi behöver nu derivera $g(x)$ och $h(x)$. Eftersom $g(x)$ är ett polynom kan vi använda oss av regeln för derivering av polynom och får $g'(x) = 3 - 2x$. Derviatan av e^x är e^x och enligt kedjeregeln får vi att $h'(x) = (-1/2)e^{-x/2}$ eftersom derivatan av $-x/2$ är $-1/2$. Sammantaget får vi

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = (3-2x)e^{-x/2} + (3x - x^2)\frac{-e^{-x/2}}{2} = \frac{6 - 7x + x^2}{2}e^{-x/2}.$$

b) För att finna maximum och minimum på intervallet behöver vi se på intervallets ändpunkter och nollställena till derivatan. (Funktionen har en derivata i alla punkter.) Ändpunkterna är $x = 0$ och $x = 10$ och $f(0) = 0(3 - 0^2)e^{-0/2} = 0$ och $f(10) = 10(3 - 10)e^{-10/2} = -70e^{-5} \approx -0,47$.

Nollställena till derivatan får vi genom att lösa ekvationen $f'(x) = 0$, dvs

$$\frac{6 - 7x + x^2}{2}e^{-x/2} = 0$$

Eftersom $e^{-x/2}$ aldrig är noll är detta ekvivalent med

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

och vi kan lösa andragradsekvationen, exempelvis genom kvadratkomplettering, och får $(x - 7/2)^2 - (7/2)^2 + 6 = 0$, vilket ger $(x - 7/2)^2 = 25/4$. Alltså måste $x - 7/2 = \pm 5/2$, dvs $x = 7/2 + 5/2 = 6$ eller $x = 7/2 - 5/2 = 1$.

Vi ser att derivatan är positiv för $0 \le x < 1$, negativ för $1 < x < 6$ och positiv för $x > 6$. Därmed är $x = 1$ ett lokalt maximum, och $f(1) = 1(3-1)e^{-1/2} = 2e^{-1/2} \approx 1,2$. Vidare är

$x = 6$ ett lokalt minimum med $f(6) = 6(3-6)e^{-6/2} = -18e^{-3} \approx -0,9$. För att veta om $x = 1$ är ett globalt maximum måste vi jämföra med $f(10)$, och ser då att $f(1) > 0 > f(10)$. På samma sätt måste vi jämföra $f(6)$ med $f(0)$ och ser att $f(6) < 0 = f(0)$. Alltså är maximum $f(1) = 2e^{-1/2}$ och minimum $f(6) = 18e^{-3}$.

För att skissera funktionens graf beräknar vi också nollställena till $f(x)$. Dessa ges av $x = 0$ och $x = 3$, eftersom $e^{-x/2}$ inte är noll.

Svar:

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (6 - 7x + x^2)e^{-x/2}/2$.

b) Maximum av $f(x)$ är $2e^{-1/2} \approx 1,2$ och minimum är $-18e^{-3} \approx -0,90$.

Övning 4.4 *Betrakta funktionen* $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$*. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används.* **(4)**

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ *på intervallet* $-1 \leq x \leq 1$ *och skissera grafen för* $f(x)$ *på samma intervall.* **(5)**

Lösning: a) Vi börjar med att skriva $f(x) = (x^2 - x)e^{2x} = g(x)h(x)$, där $g(x) = x^2 - x$ och $h(x) = e^{2x}$, och använder produktregeln för att få $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$.

Vi behöver nu derivera $g(x)$ och $h(x)$. Eftersom $g(x)$ är ett polynom kan vi använda oss av regeln för derivering av polynom och får $g'(x) = 2x - 1$. Derviatan av e^x är e^x och enligt kedjeregeln får vi att $h'(x) = 2e^{2x}$ eftersom derivatan av $2x$ är 2. Sammantaget får vi

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = (2x-1)e^{2x} + (x^2 - x) \cdot 2e^{2x} = (2x^2 - 1)e^{2x}$$

b) För att finna maximum och minimum på intervallet behöver vi se på intervallets ändpunkter och nollställena till derivatan. (Funktionen har en derivata i alla punkter.) Ändpunkterna är $x = -1$ och $x = 1$ och $f(-1) = ((-1)^2 - (-1))e^{2(-1)} = 2e^{-2} \approx 0,27$ och $f(1) = (1^2 - 1)e^{2 \cdot 1} = 0$.

Nollställena till derivatan får vi genom att lösa ekvationen $f'(x) = 0$, dvs

$$(2x^2 - 1)e^{2x} = 0$$

Eftersom e^{2x} aldrig är noll är detta ekvivalent med

$$2x^2 - 1 = 0$$

och vi får lösningarna $x = \pm 1/\sqrt{2}$ som båda ligger i intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

Funktionens värde i derivatans nollställen ges av

$$f(-1/\sqrt{2}) = \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) e^{-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}} \approx 0,29$$

$$f(1/\sqrt{2}) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}} \approx -0,85$$

När vi jämför de fyra möjliga extrempunkterna ser vi att det största värdet ges av $f(-\sqrt{2}/2)$, och det minsta av $f(\sqrt{2}/2)$.

För att skissera funktionens graf beräknar vi också nollställena till $f(x)$. Dessa ges av nollställena till $x^2 - x$, dvs $x = 0$ och $x = 1$, eftersom e^{2x} aldrig är noll.

Svar:

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (2x^2 - 1)e^{2x}$.

b) Maximum av $f(x)$ är $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 0,29$ och minimum är $\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -0,85$.

Övning 4.5 *a) Derivera funktionen $f(x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x$. (Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används.)* **(2)**

b) Derivera funktionen $g(x) = \cos 2x \sin 3x$. **(2)**

c) Bestäm ett värde på konstanten a så att funktionen $h(x) = e^{ax}\sin^2 x$ får ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$. **(5)**

Lösning: a) Vi kan skriva $f(x) = p(\cos x)$, där $p(x) = 8x^4 - 8x^2$. Derivatan av den inre funktionen, $\cos x$, är $-\sin x$ och vi kan använda kedjeregeln för att skriva $f'(x) = p'(\cos x)(-\sin x)$. Eftersom $p'(x) = 8 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 2x$ får vi

$$f'(x) = (32\cos^3 x - 16\cos x)(-\sin x) = -32\cos^3 x \sin x + 16 \sin x \cos x.$$

b) Vi kan här använda produktregeln på funktionerna $\cos 2x$ och $\sin 3x$. För derivatorna av dessa behövs dessutom kedjeregeln som ger att derivatan av $\cos 2x$ är $-2\sin 2x$ och derivatan av $\sin 3x$ är $3\cos 3x$. Produktregeln ger nu att

$$g'(x) = -2\sin 2x \sin 3x + \cos 2x 3\cos 3x) = -2\sin 2x \sin 3x + 3\cos 2x \cos 3x.$$

c) Eftersom funktionen $h(x)$ är deriverbar överallt måste den vid ett lokalt maximum ha ett nollställe i derivatan. Vi ska därför först derivera funktionen $h(x) = e^{ax}\sin^2 x$. Vi använder produktregeln på de två funktionerna e^{ax} och $\sin^2 x$. För att beräkna derivatorna av dessa behöver vi kedjeregeln som ger att derivatan av $\sin^2 x$ är $2\sin x\cos x$ och derivatan av e^{ax} är ae^{ax}. Produktregeln ger nu att

$$h'(x) = e^{ax} 2\sin x\cos x + ae^{ax}\sin^2 x = e^{ax}\sin x(2\cos x + a\sin x).$$

Faktorn e^{ax} kan aldrig vara noll och faktorn $\sin x$ är noll precis vid alla multipler av π. För att det skall finnas ett nollställe i dervatan i punkten $x = \pi/3$ måste alltså faktorn $2\cos x + a\sin x$ vara noll där, dvs

$$2\cos\frac{\pi}{3} + a\sin\frac{\pi}{3} = 0.$$

När vi löser ut a ur detta samband får vi

$$a = -2\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = -2\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

För att se om det verkligen rör sig om ett lokalt maximum studerar vi derivatans tecken runt nollstället. Faktorerna $\sin x$ och e^{ax} är båda positiva i närheten av nollstället. Faktorn $2\cos x - (2/\sqrt{3})\sin x$ är positiv i $x = 0$ för att sedan avta ända till $x = \pi/2$ eftersom $\cos x$ är avtagande och $\sin x$ är växande på intervallet $(0, \pi/2)$. Alltså är derivatan positiv till vänster om $x = \pi/3$ och negativ till höger, vilket visar att det verkligen är ett lokalt maximum.

Svar:

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = -32\cos^3 x \sin x + 16\cos x \sin x$.

b) Derivatan av $g(x)$ är $g'(x) = -2\sin 2x \sin 3x + 3\cos 2x \cos 3x$.

c) Funktionen har ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$ om $a = -2\sqrt{3}$.