5B1134 Matematik och modeller

27 september 2004

5 Femte veckan — Integraler med tillämpningar

Veckans begrepp

- Primitiva funktioner, integraler, area
- Trapetsmetoden för numerisk integration
- Partiell integration
- Variabelbyte i integraler
- Rotationsvolymer

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 5.1 [5B1134:Modell:4]

a) *Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna* $f(x) = \cos x$ *och* $g(x) = 1/2$ *på intervallet* $[0, 2\pi]$. **(4)**

b) *Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen* $g(x) = 1/2$ *mot* $g(x) = \cos a$*, där* a *är en konstant med* $0 \leq a \leq \pi$. **(3)**

c) *Vilka värden på* a *ger den största, respektive minsta arean mellan graferna?* **(2)**

Övning 5.2 [5B1134:KS:4:2003]

a) *Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna* $f(x) = \cos x$ *och* $g(x) = \sin 2x$ *på intervallet* $0 \leq x \leq \pi/2$. **(4)**

b) *Kurvan* $y = x(1 - x)$ *på intervallet* $0 \leq x \leq 1$ *roterar kring* x*-axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp.* **(3)**

c) *När ett område ovanför x-axeln roteras kring x-axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som $2\pi r A$ där A är arean under grafen som roteras och r är avståndet från områdets tyngdpunkt till x-axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över x-axeln för det område som roteras i b).* **(2)**

Övning 5.3 [5B1134:Tentamen:031013:4]

a) *Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$.* **(3)**

b) *Använd partiell integration för att beräkna integralen*

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx.$$

(4)

c) *Beräkna integralen*

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2} dx$$

med hjälp av variabelbytet $t = 2 - x^2$. (Ledning: $2/3x\sqrt{x}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$.) **(2)**

Övning 5.4 [5B1134:Tentamen:031103:4]

a) *Beräkna integralen*

$$\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x| \, dx.$$

(4)

b) *Använd först variabelbytet $t = \ln x$ och sedan partiell integration för att beräkna integralen*

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$

(5)

Övning 5.5 [5B1134:Tentamen:040109:4]

a) *Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{2x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.* **(4)**

b) *Beräkna integralen*

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) *Använd en trapetsmetoden med fyra delintervall för att få en numerisk approximation av samma integral som i föregående deluppgift.* **(2)**

Övning 5.6 [5B1134:Tentamen:040821:4]

a) *Beräkna integralen*

$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$

där $f(x) = e^x - 1$ *för alla reella* x. **(3)**

b) *Beräkna integralen*

$$\int_0^1 (1 - x^2)e^x\,dx$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) *Låt* $g(t)$ *vara en periodisk funktion med period* T *och låt* a *vara en reell konstant. Visa att*

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at} f(t)dt = K \int_0^T e^{at} f(t)dt$$

för någon konstant K *och bestäm denna konstant.* **(3)**

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

5.1 a) *Arean mellan graferna är* $\pi/3 + 2\sqrt{3}$.

b) *Uttrycket för arean är* $(2\pi - 4a)\cos a + 4\sin a$.

c) *Maximum är* 2π *och minimum är* 4.

5.2 a) *Arean av området mellan graferna är* $1/2$.

b) *Rotationskroppens volym är* $\pi/30$.

c) *Avståndet från områdets tyngdpunkt till* x*-axeln är* $1/10$.

5.3 a) *Volymen är* $23\pi/24$.

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$.

c) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2}dx = 2\sqrt{2}/3$.

5.4 a) $\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x|dx = 3\sqrt{3} - 2$.

b) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + 2 \approx 0,19.$.

5.5 a) *Arean mellan kurvorna ges av* $(e^2 + 1)(e - 1)^2/2e^2 \approx 1,68$.

b) $\int_0^\pi x \sin x\,dx = \pi$.

c) *Trapetsmetoden ger* $\pi^2(\sqrt{2} + 1)/8 \approx 2,98$.

5.6 a) $\int_0^2 f(x)^2 dx = (e^4 - 4e^2 + 7)/2$.

b) $\int_0^1 (1 - x^2)e^x\,dx = 1$.

c) *Konstanten är* $K = e^{anT}$.