# 5B1134 Matematik och modeller

27 september 2004

## 5 Femte veckan — Integraler med tillämpningar

### Lösningsförslag till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

**Övning 5.1** *a) Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \sin 2x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$.* **(4)**

*b) Kurvan $y = x(1-x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar kring $x$-axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp.* **(3)**

*c) När ett område ovanför $x$-axeln roteras kring $x$-axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som $2\pi r A$ där $A$ är arean under grafen som roteras och $r$ är avståndet från områdets tyngdpunkt till $x$-axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över $x$-axeln för det område som roteras i b).* **(2)**

*Lösning*: a) Vi behöver först skaffa oss en bild av hur graferna för funktionerna ser ut. För $\sin 2x$ är intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$ en halv period, medan det för $\cos x$ är en fjärdedels period.

Arean mellan graferna ges av

$$\int_0^{\pi/2} |f(x) - g(x)| dx$$

och vi måste finna var $f(x) \leq g(x)$, respektive tvärtom. Det finns två skärningspunkter i intervallet och de ges av ekvationen $\sin 2x = \cos x$. Eftersom $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, måste antingen $2 \sin x = 1$, eller $\cos x = 0$. I intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$ händer det då $x = \pi/6$ och $x = \pi/2$.

Alltså får vi att

$$\int_0^{\pi/2} |\sin 2x - \cos x| dx = \int_0^{\pi/6} (\cos x - \sin 2x) dx - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\cos x - \sin 2x) dx$$

En primitiv funktion till $h(x) = \cos x - \sin 2x$ får vi genom $H(x) = \sin x + 1/2 \cos 2x$ eftersom $H'(x) = \cos x + 1/2(-2 \sin 2x) = \cos x - \sin 2x$ enligt kedjeregeln.

Därmed får vi att arean mellan graferna är

$$\left[\sin x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/6} - \left[\sin x + \frac{\cos 2x}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$
$$= (\sin \pi/6 + \frac{\cos \pi/3}{2} - \sin 0 - \frac{\cos 0}{2}) - (\sin \pi/2 + \frac{\cos \pi}{2} - \sin \pi/6 - \frac{\cos \pi/3}{2})$$
$$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{2}) - (1 + \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

b) För att få rotationskroppens volym för kurvan $y = h(x) = x(1-x)$ kan vi använda oss av

$$V = \pi \int_0^1 h(x)^2 dx$$

som i vårt fall ger

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x(1-x))^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^2(1-2x+x^2)dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = \left[\frac{\pi}{3}x^3 - \frac{2\pi}{4}x^4 + \frac{\pi}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{10\pi - 15\pi + 6\pi}{30} = \frac{\pi}{30}. \end{aligned}$$

c) För att kunna använda den givna formeln, $V = 2\pi r A$, för att beräkna $r$ måste vi räkna ut arean av området. Eftersom $x(1-x)$ är positiv på hela intervallet ges arean mellan kurvan och $x$-axeln av

$$A = \int_0^1 x(1-x)dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{0}{2} - \frac{0}{3}) = \frac{1}{6}.$$

Om vi nu löser ut $r$ ur den givna formeln får vi avståndet mellan $x$-axeln och tyngdpunkten till

$$r = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\pi/30}{2\pi/6} = \frac{1}{10}.$$

**Svar**:

a) Arean av området mellan graferna är $1/2$.

b) Rotationskroppens volym är $\pi/30$.

c) Avståndet från områdets tyngdpunkt till $x$-axeln är $1/10$.

**Övning 5.2** *a) Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan* $y = \sqrt{1-2x^2}$ *roterar kring* $x$*-axeln på intervallet* $0 \leq x \leq 1/2$. **(3)**

*b) Använd partiell integration för att beräkna integralen*

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx.$$

**(4)**

c) *Beräkna integralen*

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}dx$$

*med hjälp av variabelbytet* $t = 2 - x^2$. *(Ledning:* $2/3x\sqrt{x}$ *är en primitiv funktion till* $\sqrt{x}$.*)* **(2)**

*Lösning*: a) Rotationskroppens volym ges av

$$V = \int_0^{1/2} \pi y^2 dx$$

I vårt fall är $y = \sqrt{2-x^2}$, vilket ger

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{1/2} \pi\sqrt{2-x^2}^2 dx = \int_0^{1/2} \pi(2-x^2)dx = \left[\pi 2x - \pi\tfrac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} \\ &= \tfrac{2\pi}{2} - \tfrac{\pi}{3\cdot 2^3} - (0-0) = \tfrac{24\pi-\pi}{24} = \tfrac{23\pi}{24}. \end{aligned}$$

b) Vi börjar med att använda partiell integration en gång och får

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx &= \left[x^2(-\cos x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x(-\cos x)dx \\ &= (\pi^2(-(-1)) - 0^2(-1)) + \int_0^{\pi} 2x\cos x dx = \pi^2 + \int_0^{\pi} 2x\cos x dx. \end{aligned}$$

Vi använder sedan partiell integration igen på den andra termen och får

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} 2x\cos x dx &= [2x\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\sin x dx = (0-0) - [2(-\cos x)]_0^{\pi} \\ &= -(2(-(-1)) - 2(-1)) = -4. \end{aligned}$$

Sammantaget får vi

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 + \int_0^{\pi} 2x\cos x dx = \pi^2 - 4.$$

c) Variabelbytet $t = g(x) = 2 - x^2$ ger $dt = g'(x)dx = -2xdx$ och $xdx = -1/2dt$. Vid $x = 0$ har vi $t = g(0) = 2 - 0^2 = 2$ och vid $x = \sqrt{2}$ har vi $t = g(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}^2 = 0$. Alltså får vi med variabelbytet att

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}dx = \int_2^0 \sqrt{t}(-1/2)dt = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\frac{-1}{2}\right]_2^0 = (0 - \frac{2}{3}2\sqrt{2}\frac{-1}{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

**Svar**:

a) Volymen är $23\pi/24$.

b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$.

c) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}dx = 2\sqrt{2}/3$.

**Övning 5.3** *a) Beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi} |\sin x - \cos 2x|\, dx.$$

**(4)**

*b) Använd först variabelbytet $t = \ln x$ och sedan partiell integration för att beräkna integralen*

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$

**(5)**

*Lösning*: a) Vi behöver först se var det som står innanför beloppstecken är positivt, respektive negativt. Vi ser på grafen av funktionerna $f(x) = \sin(x)$ och $g(x) = \cos(2x)$.

Skärningarna mellan graferna ges av ekvationen $\sin x = \cos 2x$, som har lösningarna $x = \pi/6$ och $x = 5\pi/6$ i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Ett sätt att se det är att skriva $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, och se att $\pi/2 - x = \pm 2x + 2n\pi$.

Vi bestämmer en primitiv funkion för $\sin x - \cos 2x$ genom att vi vet att derivatan av $\cos x$ är $-\sin x$ och derivatan av $\sin 2x$ är $2\cos 2x$. Alltså får vi att $-\cos x - (1/2)\sin 2x$ är en primitiv funktion för $\sin x - \cos 2x$.

Vi kan nu dela upp integralen i tre delar;

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} |\sin x - \cos 2x| dx &= \int_0^{\pi/6} -(\sin x - \cos 2x) dx = -\left[-\cos x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/6} \\ &= -(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) + (-1 - \frac{0}{2}) = \frac{3\sqrt{3}-4}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} |\sin x - \cos 2x| dx &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\sin x - \cos 2x) dx = \left[-\cos x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\ &= (-\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3}}{4}) - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\int_{5\pi/6}^{\pi} |\sin x - \cos 2x| dx &= \int_{5\pi/6}^{\pi} -(\sin x - \cos 2x) dx = -\left[-\cos x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{5\pi/6}^{\pi} \\ &= -(-(-1) - \frac{0}{4}) + (-\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3}}{4}) = \frac{3\sqrt{3}-4}{4}.\end{aligned}$$

Sammantaget får vi att

$$\int_0^{\pi} |\sin x - \cos 2x| dx = \frac{3\sqrt{3}-4}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}-4}{4} = \frac{12\sqrt{3}-8}{4} = 3\sqrt{3} - 2.$$

b) Vi börjar med att göra variabelbytet $t = \ln(x)$. Eftersom detta motsvarar $x = e^t$ får vi $dx = e^t dt$ och

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = \int_0^{\ln 2} t^2 e^t dt$$

Vi behöver nu använda partiell integration och får

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} t^2 e^t dt &= \Big[t^2 e^t\Big]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 2te^t dt \\
&= ((\ln 2)^2 \cdot 2 - 0) - \Big[2te^t\Big]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} 2e^t dt \\
&= 2(\ln 2)^2 - (2(\ln 2) \cdot 2 - 0) + \Big[2e^t\Big]_0^{\ln 2} \\
&= 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + (2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + 2 \approx 0,19.
\end{aligned}$$

**Svar**:

a) $\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x| dx = 3\sqrt{3} - 2.$

b) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + 2 \approx 0,19.$.

**Övning 5.4** *a) Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{2x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.* **(4)**

*b) Beräkna integralen*

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx$$

*med hjälp av partiell integration.* **(3)**

*c) Använd en trapetsmetoden med fyra delintervall för att få en numerisk approximation av samma integral som i föregående deluppgift.* **(2)**

*Lösning*: a) Vi behöver först se var den ena funktionen är större än den andra. Skärningspunkterna mellan graferna ges av $e^{2x} = e^x$, vars enda lösning är $x = 0$. För $x \leq 0$ är $e^x \geq e^{2x}$ och för $x \geq 0$ är $e^{2x} \geq e^x$. Vi får alltså dela in intervallet i två delar för att beräkna arean mellan kurvorna.

$$\int_{-1}^0 (e^x - e^{2x}) \, dx = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0 = e^0 - \frac{e^0}{2} - e^{-1} + \frac{e^{-2}}{2} = \frac{e^{-2} - 2e^{-1} + 1}{2} = \frac{(e^{-1} - 1)^2}{2}$$

och

$$\int_0^1 (e^{2x} - e^x) \, dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}e^0 + e^0 = \frac{e^2 - 2e + 1}{2} = \frac{(e-1)^2}{2}.$$

Den sammanlagda arean blir

$$\frac{(e^{-1} - 1)^2}{2} + \frac{(e-1)^2}{2} = \frac{(1 + e^2)(e-1)^2}{2e^2} \approx 1,68.$$

b) Vi använder partiell integraion genom att integrera $\sin x$ och derivera $x$. På så vis får vi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x\,dx &= [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos x)\,dx \\ &= \pi(-(-1)) - 0(-1) + [\sin x]_0^\pi = \pi + (0-0) = \pi.\end{aligned}$$

c) Om vi delar in intervallet i fyra delar får vi enligt trapetsregeln approximationen

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}(f(0) + 2f(\pi/4) + 2f(\pi/2) + 2f(3\pi/4) + f(\pi))\frac{\pi}{4}$$

I vårt fall blir detta

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\left(0\sin 0 + 2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + 2\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4} + \pi\sin\pi\right) &= \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \pi + \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8}(\sqrt{2}+1) \approx 2,98\end{aligned}$$

**Svar**:

a) Arean mellan kurvorna ges av $(e^2+1)(e-1)^2/2e^2 \approx 1,68$.

b) $\int_0^\pi x\sin x\,dx = \pi$.

c) Trapetsmetoden ger $\pi^2(\sqrt{2}+1)/8 \approx 2,98$.

**Övning 5.5** *a) Beräkna integralen*

$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$

*där $f(x) = e^x - 1$ för alla reella $x$.* **(3)**

*b) Beräkna integralen*

$$\int_0^1 (1-x^2)e^x\,dx$$

*med hjälp av partiell integration.* **(3)**

*c) Låt $g(t)$ vara en periodisk funktion med period $T$ och låt $a$ vara en reell konstant. Visa att*

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at}f(t)dt = K\int_0^T e^{at}f(t)dt$$

*för någon konstant $K$ och bestäm denna konstant.* **(3)**

*Lösning*: a) Eftersom $f(x) = e^x - 1$ är $f(x)^2 = e^{2x} - 2e^x + 1$. Vi ska alltså beräkna integralen

$$\int_0^2 (e^{2x} - 2e^x + 1)\,dx$$

En primitiv funktion till $e^x$ är $e^x$. Derivatan av $e^{2x}$ är $2e^{2x}$ och därmed är $e^{2x}/2$ en primitiv funktion till $e^{2x}$. Alltså får vi

$$\int_0^2 (e^{2x} - 2e^x + 1)\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + x\right]_0^2 = \frac{1}{2}e^4 - 2e^2 + 2 - (\frac{1}{2}e^0 - 2e^0 + 0) = \frac{e^4 - 4e^2 + 7}{2}$$

b) Vi använder partiell integration genom att integrera $e^x$ och derivera $1 - x^2$. På så vis får vi

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^2)e^x\,dx &= \Big[(1-x^2)e^x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (-2x)e^x\,dx \\ &= (0-1) + [2xe^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx \\ &= -1 + (2e - 0) - [2e^x]_0^1 = 2e - 1 - (2e - 2) = 1\end{aligned}$$

c) Eftersom $g(t)$ är periodisk med period $T$ har vi $g(t+T) = g(t)$ för alla $t$ och upprepar vi detta får vi $g(t+nT) = g(t)$ för alla $t$ och alla heltal $n$. Genom substitutionen $x = t - nT$ får vi

$$\begin{aligned}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at}g(t)\,dt &= \int_0^T e^{a(x+nT)}g(x+nT)\,dx = \int_0^T e^{ax}e^{anT}g(x)\,dx \\ &= e^{anT}\int_0^T e^{at}g(t)\,dt.\end{aligned}$$

Alltså är konstanten $K = e^{anT}$.
**Svar**:

a) $\int_0^2 f(x)^2 dx = (e^4 - 4e^2 + 7)/2.$

b) $\int_0^1 (1-x^2)e^x\,dx = 1.$

c) Konstanten är $K = e^{anT}$.