

5B1134 MATEMATIK OCH MODELLER TREDJE FÖRELÄSNINGEN

1. OM DERIVATOR

1.1. **Tangentens lutning.** Ett vanligt sätt att tänka sig derivatan av en funktion $f(x)$ är att se på grafen för funktionen och sedan på *tangentens lutning* i en viss punkt. Vi tänker oss då att det är lätt att inse vad som menas med en tangent, dvs en rät linje som går genom punkten $(a, f(a))$ och som på något vis ligger mot grafen.

1.2. **Linjär approximation.** Ett annat sätt är att tänka sig att man förstorar upp området kring punkten $(a, f(a))$ så att grafen för funktionen ser ut som en linje. Vi har alltså att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

för x nära a .

1.3. **Derivatans definition.** När vi har de här två tolkningarna kan vi se hur man skulle kunna finna en mer formell och hållbar definition av vad som menas med derivata. Om vi tänker oss den första definitionen kan vi dra en linje genom punkterna $(a, f(a))$ och $(a+h, f(a+h))$ och se på lutningen av denna. När h närmar sig noll ska lutningen på linjen närma sig tangentens lutning. Vi har ett striktare matematiskt begrepp som motsvarar *att närma sig* och som vi kallar *gränsvärde*. Vi ska inte gå mer in på definitionen av detta eftersom det kommer att studeras ingående i nästa kurs. Tanken är att vi bara vi går tillräckligt nära punkten är säkra på att viligger mycket nära gränsvärdet. Vi får alltså

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1.4. **Central differenskvot.** Ibland kan det vara lättare att hantera den *centrala differenskvoten*

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{(a+h) - (a-h)} = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Däremot kan det hända att gränsvärdet för denna existerar utan att den vanliga differenskvoten har något gränsvärde. Ett enkelt exempel på detta är när $f(x) = |x|$, dvs $f(x) = x$, för $x \geq 0$ och $f(x) = -x$ då $x < 0$. Då blir den centrala differenskvoten för $a = 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0-h)}{(0+h) - (0-h)} = \frac{h - h}{2h} = 0$$

för alla $h > 0$, medan den vanliga differenskvoten blir -1 för negativa h och $+1$ för positiva h .

1.5. Derivatans av trigonometriska funktionerna. Vi börjar med att derivera $\sin x$ i punkten $x = 0$. Alltså är vi intresserade av gränsvärdet av differenskvoten

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$$

då h går mot noll. Vi kan anta att $h > 0$ eftersom både täljare och nämnare byter tecken då h byter tecken. Genom att betrakta en cirkelsektor i enhetscirkeln med öppningsvinkel h och en triangel med hörnen $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(\cos h, \sin h)$. Enligt areasatsen är arean av triangeln

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin h$$

medan arean av cirkelsektorn är $h/2$. Eftersom triangeln ligger i cirkelsektorn får vi

$$\frac{\sin h}{2} < \frac{h}{2}$$

och

$$\frac{\sin h}{h} < 1$$

Om vi å andra sidan tittar på triangeln med hörn $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, \tan h)$ får vi en triangel som inneåller cirkelsektorn. Därmed är

$$\frac{h}{2} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan h = \frac{\sin h}{2 \cos h}$$

vilket ger

$$\frac{\sin h}{h} > \cos h$$

Alltså måste vi ha

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$$

för alla h som ligger mellan 0 och $\pi/2$.

Eftersom

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1$$

och

$$\lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

måste även gränsvärdet för $\sin h/h$ då h går mot noll finnas och vara lika med 1. Vi har alltså kommit fram till att $\sin x$ är deriverbar i punkten $x = 0$ och att derivatan är $\sin' 0 = 1$,

Vi kan också titta på derivatan av $\cos x$ då $x = 0$. Vi har då differenskvoten

$$\frac{\cos h - \cos 0}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \cdot \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \cdot \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)}$$

Vi ser att beloppet av denna differenskvot är mindre än $\sin h$ enligt de räkningar vi gjort tidigare med kvoten $\sin h/h$. Alltså måste gränsvärdet av kvoten existera och vara lika med 0.

Vi har nu derivatorna av $\sin x$ och $\cos x$ i punkten $x = 0$. För att få derivatorna i andra punkter kan vi använda additionssatserna

$$\sin(a+x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$$

Därmed får vi att

$$\sin'(a) = \sin a \cos' 0 + \cos a \sin' 0 = \cos a$$

och eftersom

$$\cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x$$

får vi också att

$$\cos'(a) = \cos a \cos' 0 - \sin a \sin' 0 = -\sin a.$$

Här har vi använt *linjäritet*, dvs att om $f(x)$ och $g(s)$ är deriverbara med derivator $f'(a)$ och $g'(a)$ i punkten $x = a$ så är också

$$h(x) = Af(x) + Bg(x)$$

deriverbar i $x = a$ med derivata

$$h'(a) = Af'(a) + Bg'(a).$$