5B1134 MATEMATIK OCH MODELLER
FJÄRDE FÖRELÄSNINGEN

1. Optimering och extrempunkter

Om en funktion är deriverbar och har ett lokalt maximum eller minimum måste derivatan i den punkten vara noll.

För att hitta lokala extrempunkter till funktionen $f(x)$ kan vi lösa ekvationen

$$f'(x) = 0.$$

Om vi ser på derivatan som tangentens lutning, betyder det precis att grafen för funktionen har en vågrät tangent i en sådan extrempunkt.

1.1. Maximum och minimum på ett intervall.

Om vi söker maximum eller minimum på ett intervall måste vi också kontrollera

- Intervallets ändpunkter
- Punkter där derivatan inte existerar

När vi har funnit alla lokala extrempunkter och jämfört värdet hos funktionen i dessa med värdet hos funktionen i intervallets ändpunkter och i de punkter där derivatan inte existerar kan vi dra slutsatser om funktionen största och minsta värde på intervallet.

Exempel. Vi ser på funktionen $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. Då är derivatan $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ som har nollställena $x = -1$ och $x = 1/3$. Vi beräknar funktionens värden i dessa punkter ch får

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 = 2$$

och

$$f(1/3) = (1/3)^3 + (1/3)^2 - (1/3) + 1 = \frac{1 + 3 - 9 + 27}{27} = \frac{22}{27}.$$

Om vi vill beräkna maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ ser vi att den ena extrempunkten ligger utanför intervallet. Derivatan existerar överallt, så de tre kandidaterna till maximum och minimum är

$$f(0) = 0^3 + 0^2 - 0 + 1 = 1, \qquad f(1/3) = \frac{22}{27} \qquad \text{och} \qquad f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 2.$$

Jämför vi dessa tre värden ser vi att

$$\frac{22}{27} < 1 < 2$$

och därmed är $f(1) = 2$ funktionens maximum och $f(1/3) = 22/27$ funktionens minimum på intervallet $0 \leq x \leq 1$.

Date: 26 september 2005.

2. Numerisk ekvationslösning

När vi söker efter ett extremvärde till $f(x)$ behöver vi lösa en ekvation av typen

$$g(x) = 0.$$

Det brukar kallas att vi söker efter *nollställen* till $g(x)$. Om vi inte kan lösa den analytiskt behöver vi en *numerisk metod*. Ett exempel på en numerisk metod är *Newton-Raphsons metod*. Den går ut på att vi startar med någon punkt som vi tror kan vara i närheten av ett nollställe, säg $x = x_0$. Sedan följer vi tangenten till grafen i punkten $(x_0, f(x_0)$ tills den skär x-axeln. Denna skärning ger oss en ny punkt x_1 som vi hoppas ligger ännu närmre nollstället. Vi kan säga att vi approximerar funktionen med en linjär funktion och finner nollstället till denna linjära funktion.

Eftersom tangentens riktning i punkten $(x_0, g(x_0))$ ges av $g'(x_0)$ och linjen skall gå genom denna punkt får vi att ekvationen för tangenten är

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0).$$

Nollstället till denna ges av

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

När vi kommit så långt fortsätter vi på samma sätt med x_1 och följer tangenten till nästa nollställe

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Samma sak upprepas, eller *itereras*, tills man är nöjd med noggrannheten i uppskattningen av nollstället. Ett mått på hur nära nollstället man är ges enligt den linjära approximationen av

$$\Delta x \approx \frac{\Delta y}{g'(x_n)} \approx \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Exempel. Om vi ska finna nollställen till funktionen $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$ med hjälp av Newton-Raphsons metod kan vi börja med $x_0 = 0$ och får sedan

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 0 - \frac{3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1}{6 \cdot 0 + 2} = \frac{1}{2}$$

och

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot (1/2)^2 + 2 \cdot (1/2) - 1}{6 \cdot (1/2) + 2} = \frac{7}{20}.$$

Vi kan nu se hur långt ifrån vi borde vara genom att beräkna nästa steg

$$\Delta x \approx -\frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = -\frac{27}{1640} \approx -0,0165$$

I det här fallet känner vi redan till att nollstället ges av $x = 1/3$, så

$$\Delta x = \frac{1}{3} - \frac{7}{20} = -\frac{1}{60} \approx -0,0167$$

så feluppskattningen är mycket god.

3. PROPORTIONALITET

Om vi har en modell som föreskriver att två storheter är proportionella kan vi med hjälp av mätningar beräkna proportionalitetskonstanten. Antag att $y = kx$ och att vi har mätvärden

x	y
1,1	2,7
2,3	4,8
3,3	7,4
4,3	9,8
5,9	12,9

Vilket värde på k passar bäst till dessa data?

3.1. **Minsta kvadratmetoden.**

För att bestämma det bästa värdet på k kan vi välja det som minimerar summan av kvadraterna på avvikelserna, dvs

$$S(k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i)^2$$

Om vi utvecklar S(k) ser vi att vi kan skriva det som

$$S(k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - 2kx_iy_i + k^2x_i^2) = A - 2Bk + Ck^2$$

där

$$A = \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \qquad B = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i, \qquad \text{och} \qquad C = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Alltså är $S(k)$ ett andragradspolynom i k och vi kan finna minimum genom att derivera $S(k)$ och får

$$S'(k) = -2B + 2Ck$$

Detta är linjärt och det finns bara ett nollställe,

$$k = \frac{B}{C} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

I vårt exempel har vi

x	y	x^2	xy
1,1	2,7	1,1	2,9
2,3	4,8	5,2	10,9
3,3	7,4	11	24,1
4,3	9,8	19	42,2
5,9	12,9	35	76,6
Summa		70,7	156,7
Kvot			**2,2**

Alltså är det linjen $y = 2,2x$ som bäst passar till mätvärdena.