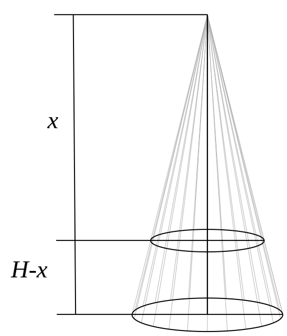
5B1134 MATEMATIK OCH MODELLER
FEMTE FÖRELÄSNINGEN

1. Om integraler

1.1. **Primitiva funktioner.** Vi har sett tidigare att vissa funktioner, $f(x)$, har *primitiva funktioner*, dvs en funktion, $F(x)$, vars derivata $F'(x) = f(x)$. Om $F(x)$ är en primitiv funktion är $F(x) + C$ också en primitiv funktion för alla konstanter C, eftersom derivatan av en konstant alltid är noll.

Exempel. Om vi ser på en cirkulär kon med bottenradie R och höjd H kan vi se på volymen av den delkon som har höjd x som en funktion $V(x)$.



Om vi deriverar funktionen $V(x)$ får vi

$$V'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}.$$

Vi kan tolka $V(x+h) - V(x)$ som volymen av en skiva med tjocklek x. Om $A(x)$ är konens tvärsnittsarea på avstånd x från toppen får vi att

$$A(x)h < V(x+h) - V(x) < A(x+h)h$$

och därmed är

$$A(x) < \frac{V(x+h) - V(x)}{h} < A(x+h).$$

När vi låter $h > 0$ krympa mot noll får vi att

$$V'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = A(x).$$

Date: 3 oktober 2005.

Eftersom vi nu vet att

$$A(x) = \pi \left(\frac{Rx}{H} \right)^2$$

måste vi leta efter en primitiv funktion till x^2. Vi vet att vi får $3x^2$ när vi deriverar x^3, och därmed får vi x^2 när vi deriverar $x^3/3$. Enligt våra uträkningar är $V(x)$ en primitiv funktion till

$$A(x) = \pi \frac{R^2}{H^2} x^2$$

och alltså måste

$$V(x) = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} + C$$

för någon konstant C. Nu vet vi också att $V(0) = 0$, vilket ger $C = 0$ och vi får hela konens volym som

$$V(H) = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

1.2. **Integraler.** Om vi har en funktion $f(x)$ med en primitiv funktion $F(x)$ kan vi låta

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

och vi kan tolka detta uttryck som arean mellan grafen för $f(x)$ på intervallet $a \leq x \leq b$ och x-axeln. Vi skriver ofta också

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exempel. Vi har enligt ovan att $x^3/3$ är en primitiv funktion till x^2 och därmed

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Tolkningen av detta som en areaberäkning ger att arean av området mellan x-axeln och kurvan $y = x^2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ är $1/3$.

1.3. **Rotationsvolymer.** Om vi ser tillbaka på exemplet med konen ser vi att vi egentligen inte använt oss av att det är fråga om en cirkulär kon annat än när vi har beräknat $A(x)$. Vi får i vilket fall som helst att

$$V'(x) = A(x)$$

där $A(x)$ är tvärsnittsarean på avstånd x från toppen. Vi har därför att

$$V(H) = V(H) - V(0) = \int_0^H A(x)\,dx.$$

Om vi istället hade haft en rotationskropp som fås genom att rotera en kurva $y = f(x)$ runt x-axeln, hade tvärsnittsarean varit given av

$$A(x) = \pi f(x)^2$$

och volymen blir

$$V(H) = \int_0^H \pi f(x)^2 \, dx.$$

Om vi exempelvis ser ett klot som att kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $-r \leq x \leq r$ får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2) \, dx = \pi \left[xr^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} \\ &= \pi r^3 - \pi \frac{r^3}{3} - \pi(-r^3) + \pi \frac{(-r)^3}{3} = \pi \frac{3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

1.4. **Differenser och summor.** Vi kan jämföra sambandet mellan derivata och integral med sambandet mellan differenser och summor. Om vi har en följd av tal, exempelvis

$$0, 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$$

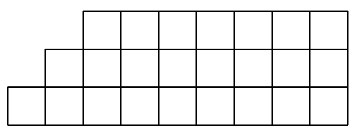
kan vi bilda *differenser*, eller *skillnader*, genom $1 - 0 = 1$, $3 - 1 = 2$, $6 - 3 = 3$, osv och får en ny följd

$$1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$$

Här är det klart att om vi kommer ihåg det första talet i den första följden, och sedan bara differenserna, kan vi få tillbaka hela den första följden genom att summera:

$$1 = 1, \qquad 1+2 = 3, \qquad 1+2+3 = 6, \qquad 1+2+3+3 = 9, \qquad 1+2+3+3+3 = 12, \ldots$$

Ritar vi upp det med rutor får vi



Vi kan nu tolka den första följden som antalet rutor till vänster om en viss linje.