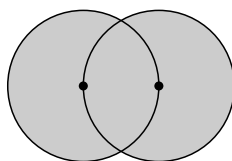


5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1

Uppgift

- a) I en spetsvinklig¹ triangel är två av sidorna 8,6 meter och 9,7 meter. Arean är 32 kvadratmeter. Hur stora är vinklarna och hur lång är den tredje sidan? Ange svaren med två gällande siffrors noggrannhet. (5)
- b) Två cirklar med samma radie r har sina medelpunkter på varandras periferi. Hur stor är arean av det område som cirkelarna bildar tillsammans? Ange svaret med ett exakt värde. (4)

**Lösningsförslag**

- a) Om vi skriver $a = 8,6$, $b = 9,7$ har vi enligt areasatsen att

$$\frac{1}{2} \cdot ab \sin \gamma = 32$$

och därmed

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 32}{8,6 \cdot 9,7} \approx 0,767$$

vilket ger $\gamma \approx 50^\circ$. Enligt cosinussatsen kan vi räkna ut den tredje sidans längd genom

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \approx (8,6)^2 + (9,7)^2 - 2(8,6)(9,7)(0,643) \approx 61$$

och därmed är $c \approx 7,8$. Vi kan använda sinussatsen för att få återstående vinklar.

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad \implies \quad \sin \beta = \frac{b \sin \gamma}{c} \approx \frac{9,7 \cdot 0,767}{7,8} \approx 0,95$$

vilket ger $\beta \approx 72^\circ$. På samma sätt får vi

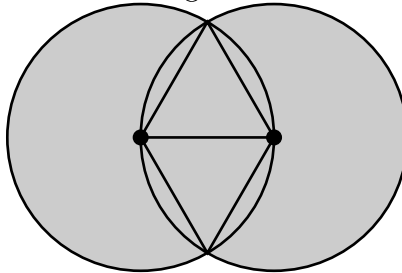
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} \quad \implies \quad \sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c} \approx \frac{8,6 \cdot 0,767}{7,8} \approx 0,85$$

¹alla vinklar är mindre än 90° ($\pi/2$ radianer)

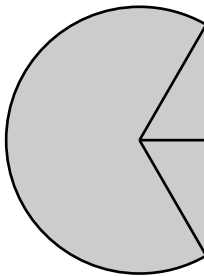
vilket ger $\alpha \approx 58^\circ$. Vi kan konstatera att vinkelsumman verkligen är $50^\circ + 58^\circ + 72^\circ = 180^\circ$.

Observera att man med olika avrundningar kan få exempelvis $\beta \approx 73^\circ$.

b) Eftersom avstånden mellan cirklarnas medelpunkter är lika med cirklarnas radie r får vi två liksidiga trianglar i centrum av figuren.



Klipper vi sedan isär figuren utefter linjen mellan cirklarnas skärningspunkter får vi två lika stora figurer.



Varje halva består av en cirkelsektor med medelpunktsvinkel $4\pi/3$ och en triangel med två sidor r och mellanliggande vinkel $2\pi/3$. Vinklarna får man genom att se att det från början var liksidiga trianglar med vinklarna $\pi/3$. Enligt areasatsen är triangelns area

$$\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

och cirkelsektorns area är

$$\frac{4\pi}{3} \frac{r^2}{2} = \frac{2\pi r^2}{3}.$$

Sammantaget blir hela figurens area

$$2 \left(\frac{2\pi r^2}{3} + \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{(8\pi + 3\sqrt{3})r^2}{6}.$$

Svar:

- Den tredje sidans längd är 7,8 meter och vinklarna är 50° , 58° och 72° . (0,87, 1,0 och 1,3 radianer.)
- Figurens area är $(8\pi + 3\sqrt{3})r^2/6$.

Bedömningskriterier

- a)
 - Korrekt formulering av areasatsen, **1 poäng**.
 - Korrekt användning av areasatsen för att bestämma en vinkel, **1 poäng**.
 - Korrekt användning av cosinussatsen för att bestämma tredje sidans längd, **1 poäng**.
 - Korrekt beräkning av andra vinkeln, **1 poäng**.
 - Korrekt beräkning av tredje vinkeln, **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst fyra poäng om svaren angivits med fel noggrannhet.
 - b)
 - Korrekt uppdelning av figuren, **1 poäng**.
 - Korrekt beräkning av cirkelsektorns area, **1 poäng**.
 - Korrekt beräkning av triangelns area, **1 poäng**.
 - Korrekt total area, **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst två poäng om svaret ej är angivet exakt.
- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inte avdrag.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.