

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 2

Uppgift

- a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $5\pi \leq t \leq 7\pi$ till ekvationen

$$\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ange svaret exakt i radianer. **(3)**

- b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

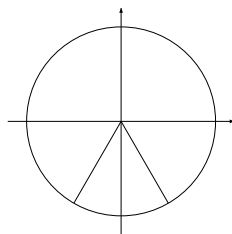
$$5 \sin x + 8 \cos x = 0$$

med en noggrannhet på tre gällande siffror. **(3)**

- 2) Uttrycket $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ kan skrivas om på formen $A \sin(2x + \phi) + B$.
 Bestäm konstanterna A och B uttryckta i a , b och c . **(3)**

Lösningsförslag

- a) Vi får de första lösningarna till ekvationen $\sin t = -\sqrt{3}/2$ i intervallet $0 \leq t \leq 2\pi$ genom att betrakta enhetscirkeln.



Vi har då att

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$t = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{eller} \quad t = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$

där n är ett godtyckligt heltal. För att $t = 4\pi/3 + 2\pi n$ skall ligga i det angivna intervallet måste

$$5\pi \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leq 7\pi \iff \frac{5\pi}{2\pi} - \frac{4\pi}{6\pi} \leq n \leq \frac{7\pi}{2\pi} - \frac{4\pi}{6\pi} \iff \frac{11}{6} \leq n \leq \frac{17}{6}$$

Det enda heltal som ligger i detta intervall är $n = 2$, vilket ger $t = 4\pi/3 + 4\pi = 16\pi/3$. För den andra serien av lösningar får vi på samma sätt

$$5\pi \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \leq 7\pi \iff \frac{5\pi}{2\pi} - \frac{5\pi}{6\pi} \leq n \leq \frac{7\pi}{2\pi} - \frac{5\pi}{6\pi} \iff \frac{5}{3} \leq n \leq \frac{8}{3}$$

och även här måste $n = 2$. Alltså är $t = 5\pi/3 + 4\pi = 17\pi/3$ den andra lösningen i intervallet.

b) Vi kan börja med att skriva om $5\sin x + 8\cos x$ som $A\sin(x + \phi)$. Det kan vi göra genom att använda additionssatsen på $A\sin(x + \phi)$ och få ekvationen

$$A\sin(x + \phi) = A\sin x \cos \phi + A\cos x \sin \phi = 5\sin x + 8\cos x.$$

Den löses om

$$\begin{cases} A\cos \phi = 5 \\ A\sin \phi = 8 \end{cases}$$

Vilket ger $A^2 = A^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 5^2 + 8^2 = 89$. Vi kan alltså välja $A = \sqrt{89}$. För att hitta ϕ kan vi dela ekvationerna med varandra och få $\tan x = 8/5 = 1,6$, vilket enligt tabellen motsvarar $\phi \approx 1,01$.

För att $A\sin(x + \phi) = 0$ måste nu $x + \phi = n\pi$ där n är ett godtyckligt heltal. Den allmänna lösningen ges alltså av $x = -\phi + n\pi$. Detta är positivt om $n\pi - \phi > 0$, dvs om $n\pi > \phi$. Eftersom $\pi \approx 3,14$ ges den minsta positiva lösningen därmed av $n = 1$ och $x = \pi - \phi \approx 3,14 - 1,01 = 2,13$.

Alternativt kan man anta att $\cos x \neq 0$, eftersom $x = 0$ inte är någon lösning, och skriva om ekvationen som

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{8}{5}$$

Ekvationen $\tan x = -1,6$ har enligt tabellen lösningen $x = -1,01$ eftersom $\tan(-x) = -\tan(x)$. Perioden hos $\tan(x)$ är π och samtliga lösningar ges därmed av $x = n\pi - \arctan(1,6)$.

Om man istället räknar i grader får man $180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$.

c) Vi använder additionssatsen för att skriva om högerledet,

$$\begin{aligned} A\sin(2x + \phi) + B &= A\sin(2x)\cos \phi + A\cos(2x)\sin \phi + B \\ &= 2A\cos \phi \sin x \cos x + A\sin \phi(\cos^2 x - \sin^2 x) + B\sin^2 x + B\cos^2 x \end{aligned}$$

För att detta skall vara lika med vänsterledet räcker det att

$$\begin{cases} 2A\cos \phi = b \\ A\sin \phi + B = c \\ -A\sin \phi + B = a \end{cases}$$

Vi får reda på B genom att addera de båda sista ekvationerna vilket ger

$$2B = a + c \iff B = \frac{a + c}{2}.$$

När vi istället tar skillnaden mellan de två sista får vi

$$2A \sin \phi = c - a$$

vilket tillsammans med den första innebär att

$$4A^2 = 4A^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = b^2 + (c - a)^2.$$

Därmed kan vi välja

$$A = \frac{\sqrt{b^2 + (c - a)^2}}{2}.$$

Ett alternativ är att direkt skriva om $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ som

$$\frac{a+c}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{b}{2} \sin x \cos x + \frac{c-a}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{a+c}{2} + \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c-a}{2} \cos 2x$$

vilket omedelbart ger $B = (a + c)/2$ och genom den vanliga omskrivningen ger

$$A^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2.$$

Svar:

- a) Lösningarna $t = 16\pi/3$ och $t = 17\pi/3$ är de enda i det givna intervallet.
- b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 2, 13$ eller $x = 122^\circ$ med tre gällande siffrors noggrannhet.
- c) $A = (\sqrt{b^2 + (c - a)^2})/2$ och $B = (a + c)/2$.

Bedömningskriterier

- a)
 - En korrekt lösning till ekvationen, **1 poäng**.
 - En första korrekt motiverad lösning i rätt intervall, **1 poäng**.
 - Den andra lösningen i rätt intervall, **1 poäng**.
- b)
 - Korrekt omskrivning av ekvationen som $A \sin(x + \phi) = 0$ eller $\tan(x) = -8/5$, **1 poäng**.
 - En korrekt lösning till ekvationen, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverad minsta positiva lösning, **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst 2 poäng om svaret är angivet med fel noggrannhet.
- c)
 - Korrekt uppställda krav på A och B , **1 poäng**.
 - Korrekt uttryck för A , **1 poäng**.
 - Korrekt uttryck för B , **1 poäng**.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.