

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 3, 2005

Uppgift

- a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

och ange tydligt vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

på intervallet $-2 \leq x \leq 2$. Ange svaren exakt. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) Använd Newton-Raphsons metod för att beräkna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$4 \sin x = x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Gör två iterationer från startvärdet $x_0 = \pi$. (2)

Lösningsförslag

a) Vi kan skriva $f(x) = g(x)h(x)$ där $g(x) = x$ och $h(x) = e^{-x^2/2}$. Derivatan av $g(x) = x$ är 1, eftersom det är en linjär funktion. Vi kan derivera $h(x)$ med hjälp av kedjeregeln. Den inre funktionen $-x^2/2$ är ett polynom och dess derivata är därmed $-2x/2 = -x$. Eftersom exponentialfunktionen är sin egen derivata får vi

$$g'(x) = e^{-x^2/2}(-x) = -xe^{-x^2/2}.$$

Enligt produktregeln är nu

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 1 \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot (-xe^{-x^2/2}) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}.$$

b) För att hitta lokala extrempunkter letar vi efter nollställena hos derivatan till funktionen. I uppgift a) har vi redan beräknat derivatan och vi söker alltså nollställena till

$$f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$

Eftersom exponentialfunktionen aldrig kan vara noll ges lösningarna av $x = \pm 1$.

Vi ska nu jämföra värdena för funktionen i dessa punkter med värdena i ändpunkterna. Vi har

$$f(-1) = (-1) \cdot e^{-(-1)^2/2} = -e^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{e}} \approx -0,607$$

och

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1^2/2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,607$$

I ändpunkterna har vi

$$f(-2) = (-2) \cdot e^{-(-2)^2/2} = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \approx -0,271$$

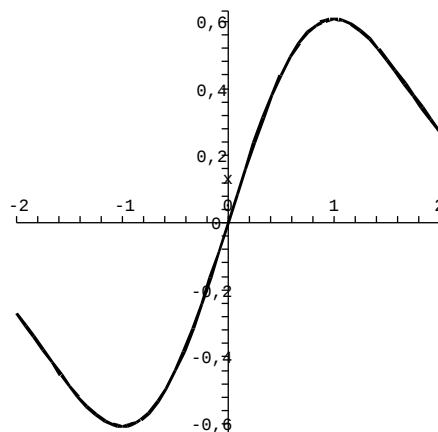
och

$$f(2) = 2 \cdot e^{-2^2/2} = e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0,271$$

Vi ser att

$$-\frac{1}{\sqrt{e}} < -\frac{2}{e^2} < \frac{2}{e^2} < \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Alltså är $f(1) = 1/\sqrt{e}$ funktionens maximum och $f(-1) = -1/\sqrt{e}$ funktionens minimum på intervallet. Grafen för funktionen ser ut som



eftersom $f(-x) = -f(x)$ och den enda skärningspunkten med x -axeln ges av $x = 0$.

c) Vi skriver ekvationen som $g(x) = 0$ med funktionen $g(x) = 4 \sin x - x$. Vi behöver först derivera $g(x)$ och får då

$$g'(x) = 4 \cos x - 1.$$

Därmed får vi det första steget i Newton-Raphsons metod som

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = \pi - \frac{4 \sin(\pi) - \pi}{4 \cos(\pi) - 1} = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} \approx 2,51$$

Nästa steg ger

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \approx 2,51 - \frac{4 \sin(2,51) - 2,51}{4 \cos(2,51) - 1} \approx 2,51 - \frac{4 \cdot 0,588 - 2,51}{4 \cdot (-0,809) - 1} \approx 2,51 - 0,037 \approx 2,47$$

Svar:

- a) $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$.
- b) Maximum är $f(1) = 1/\sqrt{e}$ och minimum $f(-1) = -1/\sqrt{e}$.
- c) Två steg med Newton-Raphsons metod ger närmevärdet $x = 2,47$ (med tre gällande siffror).

Bedömningskriterier

- a) – Korrekt användning av kedjeregeln, **1 poäng**.
 - Korrekt användning av produktregeln, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd derivering, **1 poäng**.
- b) – Korrekt analys av extrempunkter och ändpunkter, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverat maximum, **1 poäng**.
 - Korrekt motiverat minimum, **1 poäng**.
 - Korrekt graf med avseende på axlar, maximum, minimum, växande, avtagande och skärning med axlarna, **1 poäng**.
 - Sammanlagt högst tre poäng om svaren angivits med närmevärden.
- c) – Korrekt användning av Newton-Raphsons metod, inklusive korrekt derivering, **1 poäng**.
 - Korrekt närmevärde efter två steg, **1 poäng**.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.