

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 4, 2005

Uppgift

- a) Beräkna arean av området som begränsas av de två kurvorna $y = x$ och $y = x^3$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(3)**
- b) Använd trapetsmetoden för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Använd fyra delintervall och ange svaret med två decimaler. **(3)**

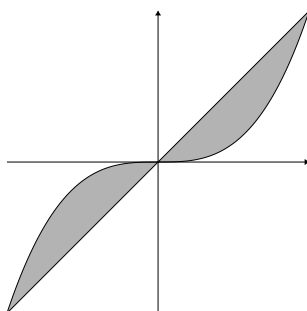
- c) Använd variabelbytet $t = x^2$ för att beräkna ett exakt värde för integralen

$$\int_0^2 x e^{-x^2/2} dx.$$

(3)

Lösningsförslag

- a) På intervallet $-1 \leq x \leq 0$ har vi att $x^3 \geq x$, eftersom $0 \leq x^2 \leq 1$ och på intervallet $0 \leq x \leq 1$ har vi på samma sätt att $x^3 \leq x$.



Alltså ges arean, A , mellan kurvorna av

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{0}{4} - \frac{0}{2} - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4} - \frac{0}{2} + \frac{0}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vi har använt att $x^{n+1}/(n+1)$ är en primitiv funktion till x^n .

b) Vi delar in intervallet $0 \leq x \leq 1$ i fyra delar och får då gränspunkterna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 2/4$ och $x_4 = 1$. Enligt trapetsmetoden blir bidraget från de fyra delarna

$$\frac{1}{4} \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} = \frac{0^2 \sqrt{1-0^2} + (1/4)^2 \sqrt{1-(1/4)^2}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{512} \approx 0,0076$$

$$\frac{1}{4} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{(1/4)^2 \sqrt{1-(1/4)^2} + (1/2)^2 \sqrt{1-(1/2)^2}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{512} + \frac{\sqrt{3}}{64} \approx 0,0346$$

$$\frac{1}{4} \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} = \frac{(1/2)^2 \sqrt{1-(1/2)^2} + (3/4)^2 \sqrt{1-(3/4)^2}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{64} + \frac{9\sqrt{7}}{512} \approx 0,0736$$

och

$$\frac{1}{4} \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} = \frac{(3/4)^2 \sqrt{1-(3/4)^2} + 1^2 \sqrt{1-1^2}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{512} \approx 0,0465$$

Lägger vi ihop dessa bidrag får vi uppskattningen

$$0,0076 + 0,0346 + 0,0736 + 0,0465 \approx 0,16.$$

c) När vi gör variabelbytet $t = x^2$ får vi $dt = 2x dx$, dvs $x dx = (1/2)dt$. Alternativt kan vi skriva $x = \sqrt{t}$ och får då $dx = (1/(2\sqrt{t}))dt$. Gränserna ändras genom $t_0 = 0^2$ och $t_1 = 2^2 = 4$. Alltså

$$\int_0^2 x e^{-x^2/2} dx = \int_0^4 \frac{1}{2} e^{-t/2} dt.$$

Eftersom $-2e^{-t/2}$ är en primitiv funktion till $e^{-t/2}$ får vi nu

$$\int_0^4 \frac{1}{2} e^{-t/2} dt = \left[\frac{-2}{2} e^{-t/2} \right]_0^4 = -e^{-4/2} - (-e^{-0/2}) = 1 - e^{-2}.$$

Svar:

a) Arean av det området mellan kurvorna är $1/2$ (areaenheter).

b) Uppskattningen med trapetsmetoden ger $0,16$.

c) $\int_0^2 x e^{-x^2/2} dx = 1 - e^{-2}$.

Bedömningskriterier

- a) – Korrekt uppdelning av integralen i två delar, **1 poäng**.
 - Korrekta primitiva funktioner, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd integration, **1 poäng**.
 - b) – Korrekt princip för trapetsmetoden, **1 poäng**.
 - Korrekta bidrag från delintervallen, **1 poäng**.
 - Korrekt svar med två decimaler, **1 poäng**.
 - c) – Korrekt genomfört variabelbyte, **1 poäng**.
 - Korrekta primitiva funktioner, **1 poäng**.
 - Korrekt slutförd integration, **1 poäng**.
- Mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inte avdrag.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

- 0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.
- 1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
- 2p** Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
- 3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömningskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.