5B1134 MATEMATIK OCH MODELLER
LEDNINGAR TILL INLÄMNINGSUPPGIFTEN 2005

1. Burkar som flyter

För att kunna lösa den tredje deluppgiften av uppgift ett behövs mer fysikaliska principer än bara Arkimedes princip. Den princip som behövs är att ett system är stabilt om den *potentiella energin* i systemet är minimerad. På så vis finns ingen potentiell energi som skulle kunna omvandlas till rörelseenergi och systemet vill fortsätta befinna sig i vila.

En massa, m, som befinner sig i tyngdkraftfältet från jorden har en potentiell energi som ges av mgh gär g är en konstant och h är masscentrums (tyngdpunktens) höjd över en given referenshöjd. Eftersom det bara är skillnader i potentiell energi mellan olika lägen som kan få massan i rörelse spelar det ingen roll var vi sätter referenslinjen.

Om ett system består av flera delar är dess sammanlagda potentiella energi summan av delarnas potentiella energi.

Exempel. Om vi har en stav av längd ℓ med försumbar massa med en tyngd i varje ända, säg med massorna m och $2m$ som vi föröker balansera på en kant någonstans på ett avstånd x från den tyngre massan har vi den potentiella energin given av

$$-2mgx\sin\phi + mg(\ell - x)\sin\phi = mg\sin\phi(3x - \ell)$$

beroende på stavens lutning, ϕ, i förhållande till horisontalplanet. Vi ser att $\phi = 0$ bara kan ge ett minimum om $3x - \ell = 0$, dvs om $x = \ell/3$. Det betyder att vi måste balansera under stavens tyngdpunkt. Om $3x > \ell$ kommer $\phi = \pi/2$ att ge ett minimum och den tyngre massan kommer vilja dra nedåt, medan om $3x < \ell$ blir $\phi = \pi/2$ ett minimum och den lättare massan kommer att vinna. Rita gärna en figur och verifiera räkningarna i exemplet.

För ett betrakta en burk som flyter måste man betrakta potentiella energin hos hela systemet, inklusive det omkringliggande vattnet. Eftersom den undanträngda volymen inte beror på hur burken lutar utan bara på dess tyngd, inklusive tyngden av vattnet i burken, kan man räkna med att den potentiella energin för det omkringliggande vattnet är en (okänd) konstant minus den potentiella energin för det vatten som skulle ha varit där burken befinner sig om vattenytan varit intakt.

2. Att mäta vinklar på en sfär efter projektion

Vinklar förvrängs vid projektion. Om vi kan håll reda på hur de förvrängs kan vi genom mätningar av vinklarna efter projektionen avgöra hur de var innan projektionen.

Den enklaste typen av projektion är den ortogonala parallellprojektion som använts vid avbildningen av sfären i uppgift 2. Om vi har koordinataxlarna x och z i papperets plan och y-axeln vinkelrätt in eller ut ur papperet får vi projektionen genom

$$(x, y, z) \longmapsto (x, z)$$

Om vi nu är intresserade av hur vinklarna ser ut i plan som lutar i förhållande till xy-planet kan vi först se på hur det fungerar om vi har ett plan som bara lutar i x-riktningen. Säg att vinkeln mellan planet och xz-planet ges av ϕ. Då kommer varje sträcka i x-led i det lutande planet att efter projektionen ha förkortats med en faktor $\cos\phi$. Sträckor i z-led förändras däremot inte alls. Rita själv några figurer för att övertyga dig om att det är så.

Det här betyfer att vi kan ränka ut vinkeln mellan en linje i planet och z-axeln genom att se på projektionen på xz-planet och justera i x-led med faktorn $\cos\phi$. Fundera på detta och prova något exempel. Hur kommer faktorn $\cos\phi$ in? Om α och β är viklarna mellan linjen och z-axen före, respektive efter, projektionen kommer vi att ha

$$\tan\alpha = \cos\phi\tan\beta \qquad \text{eller} \qquad \tan\beta = \cos\phi\tan\alpha.$$

Vilket av dessa är korrekt? Rita en figur och prova så är det lätt att se vilket som stämmer.

Om vi väl kan räkna ut vinkeln mellan en viss linje och z-axeln kan vi förstås få vinklar mellan olika linjer genom att subtrahera de två vinklarna mellan linjerna och yz-axeln.