

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till tentamen
den 17 oktober 2005

1. a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 4, 2 cm, 6, 3 cm och 7, 8 cm. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(3)**
- b) Bestäm arean av en triangel med sidlängderna 4, 0 cm, 5, 2 cm och 6, 5 cm. Ange svaret som närmevärde med två gällande siffror. **(2)**
- c) Beräkna arean av ett cirkelsegment med sidan 8, 4 cm och höjden 2, 3 cm. Ange svaret som ett närmevärde med två gällande siffror. **(4)**



Lösning: a) Vi betecknar sidlängderna med $a = 4, 2$ cm, $b = 6, 3$ cm och $c = 7, 8$ cm. Om motstående vinklar är α , β och γ får vi enligt cosinussatsen att

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

vilket ger

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6,3^2 + 7,8^2 - 4,2^2}{2 \cdot 6,3 \cdot 7,8} \approx 0,843$$

På samma sätt får vi

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4,2^2 + 7,8^2 - 6,3^2}{2 \cdot 4,2 \cdot 7,8} \approx 0,592$$

och

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4,2^2 + 6,3^2 - 7,8^2}{2 \cdot 4,2 \cdot 6,3} \approx -0,066$$

Genom att titta i tabellen får vi att

$$\alpha \approx 32^\circ, \quad \beta \approx 54^\circ \quad \text{och} \quad \gamma \approx 94^\circ.$$

b) För att beräkna arean kan vi använda areasatsen

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

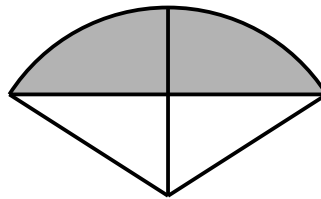
där $a = 4,0$ cm, $b = 5,2$ cm och γ är mellanliggande vinkel. För att bestämma γ kan vi använda cosinussatsen som ger att

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \approx 0,789$$

Enligt tabellen får vi då att $\sin \alpha \approx 0,616$ och arean av triangeln är därmed

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 5,2 \cdot 0,616 \text{ cm}^2 \approx 6,4 \text{ cm}^2$$

c) Vi kan använda höjden, $h = 2,3$ cm, och halva sidan, $s/2 = 8,4/2$ cm, för att beräkna radien, r , i cirkelbågen.



Enligt Pythagoras sats använd på en av de rätvinkliga triangelarna i figuren måste

$$r^2 = (r - h)^2 + \frac{s^2}{4} \iff 2rh = h^2 + \frac{s^2}{4} \iff r = \frac{4h^2 + s^2}{8h} \approx 4,98 \text{ cm}.$$

Öppningsvinkeln, ϕ , ges av

$$\sin \phi/2 = \frac{s}{2r} \approx 0,843$$

vilket ger $\phi \approx 2 \cdot 1,00 = 2,00$ radianer. Arean av motsvarande cirkelsektor är

$$A_1 = \frac{\phi r^2}{2} \approx 24,9 \text{ cm}^2$$

och vi måste dra bort arean av triangeln med area

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot r^2 \sin \phi \approx 11,3 \text{ cm}^2.$$

Alltså är cirkelsegmentets area

$$A = A_1 - A_2 \approx 13,6 \text{ cm}^2 \approx 14 \text{ cm}^2.$$

Svar:

a) Vinklarna är $\alpha \approx 32^\circ$, $\beta \approx 54^\circ$ och $\gamma \approx 94^\circ$.

- b) Arean är 6,4 kvadratcentimeter.
 c) Aran av cirkelsegmentet är 14 cm².

2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(3x + \pi/4) = \sqrt{3}. \quad (3)$$

- c) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$2,0 \sin x - 3,2 \cos x = 2,4.$$

Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet. (4)

- c) Bestäm konstanterna a och b så att kurvan $y = a \cos x + b \sin x$ går genom punkterna $(x, y) = (0, 2)$ och $(x, y) = (\pi/3, -1)$. (2)

Lösning: a) I intervallet $-\pi/2 < x < \pi/2$ antar $\tan x$ varje värde precis en gång. För $x = \pi/3$ har vi att $\sin x = \sqrt{3}/2$, $\cos x = 1/2$ och $\tan x = \sqrt{3}$. Alltså fås en lösning av ekvationen av

$$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{12} = \frac{4\pi - 3\pi}{36} = \frac{\pi}{36}.$$

Eftersom $\tan x$ har perioden π har $\tan(3x + \pi/4)$ perioden $\pi/3$. Alltså får vi samliga lösningar av

$$x = \frac{\pi}{36} + n\frac{\pi}{3}.$$

- b) Vi skriver först om vänsterledet som

$$A \sin(x + \phi) = A \sin x \cos \phi + A \cos x \sin \phi.$$

Det kan vi åstadkomma ifall

$$\begin{cases} A \cos \phi = 2,0 \\ A \sin \phi = -3,2 \end{cases}$$

Genom att kvadrera bägge ekvationerna och summera får vi

$$A^2 = A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi = (2,0)^2 + (-3,2)^2 = 4,0 + 10,24 = 14,24.$$

Alltså kan vi välja $A = \sqrt{14,24} \approx 3,77$. Eftersom $\cos \phi$ är positivt kan vi välja ϕ i intervallet $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ och eftersom

$$\tan \phi = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = \frac{-3,2}{2,0} = -1,6$$

får vi $\phi \approx -1,01$ radianer.

Vi kan nu lösa ekvationen

$$3,77 \sin(x - 1,01) = 2,4$$

vilket ger $\sin(x - 1,01) \approx 0,636$. Vi får en lösning om $x - 1,01 \approx 0,69$, dvs $x \approx 1,70$, och en annan lösning om $x - 1,01 = \pi - 0,69$, dvs $x \approx 3,46$. Eftersom perioden är $2\pi \approx 6,3$ finns inga positiva lösningar som är mindre än $x = 1,70$.

c) Vi sätter in de två givna värdena i funktionen och får på det viset två ekvationer

$$\begin{cases} a \cos 0 & + & b \sin 0 & = & 2 \\ a \cos \pi/3 & + & b \sin \pi/3 & = & -1 \end{cases}$$

Genom att sätta in värdena på sinus och cosinus i 0 och $\pi/3$ får vi

$$\begin{cases} a & = & 2 \\ a/2 & + & b\sqrt{3}/2 & = & -1 \end{cases}$$

Sätter vi in värdet på a som ges av den första ekvationen i den andra får vi

$$\frac{2}{2} + b\frac{\sqrt{3}}{2} = -1$$

dvs

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1 - 1) = -\frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Alltså går kurvan

$$y = 2 \cos x - \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin x$$

genom punkterna $(x, y) = (0, 2)$ och $(x, y) = (\pi/3, -1)$.

Svar:

- a) Lösningarna ges av $x = \pi/26 + n\pi/3$ där n är ett godtyckligt heltal.
- b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 1,70$ radianer.
- c) Konstanterna är $a = 2$ och $b = -4\sqrt{3}/3$.

3. a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \cos(x)$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att enge vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

- b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3x^2\sqrt{x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 1$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

- c) För att bestämma maximum för funktionen $h(x) = e^{-at} \sin(\omega t)$ för $t > 0$ vill man hitta det första nollstället för derivatan, $h'(x)$. En första gissning är $t = \pi/2\omega$, eftersom sinusfunktionen har sitt maximum i den punkten. Använd Newton-Raphsons metod för att förbättra denna gissning. (2)

Lösning: a) vi kan skriva $f(x) = g(x)h(x)$ där $g(x) = e^{-\sqrt{x}}$ och $h(x) = \cos x$. Vi behöver derivera bägge dessa funktioner, och för att derivera den första använder vi kedjeregeln

$$g'(x) = e^{-\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

eftersom derivatan av den inre funktionen $-\sqrt{x}$ är $-1/(2\sqrt{x})$ och derivatan av den yttre funktionen, e^x , är e^x . Derivatan av $h(x) = \cos x$ är $h'(x) = -\sin x$. Därmed får vi enligt produktregeln att

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = e^{-\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cos x + e^{-\sqrt{x}} (-\sin x) \\ &= -e^{-\sqrt{x}} \left(\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \sin x \right). \end{aligned}$$

Observera att derivatan inte är definierad i punkten $x = 0$.

- b) Vi börjar med att leta efter lokala extrempunkter genom att finna nollställena till derivatan. I det här fallet har vi att

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x - 3x^2)' \sqrt{x} + (2x - 3x^2)(\sqrt{x})' = (2 - 6x)\sqrt{x} + (2x - 3x^2) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= (2 - 6x)\sqrt{x} + \left(1 - \frac{3x}{2}\right)\sqrt{x} = \left(3 - \frac{15}{2}x\right)\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Vi har två nollställena för derivatan i intervallet, dels $x = 0$, dels $x = 2/5$. Vi sätter in dessa värden i funktionen och jämför med värdena i ändpunkterna. Vi får

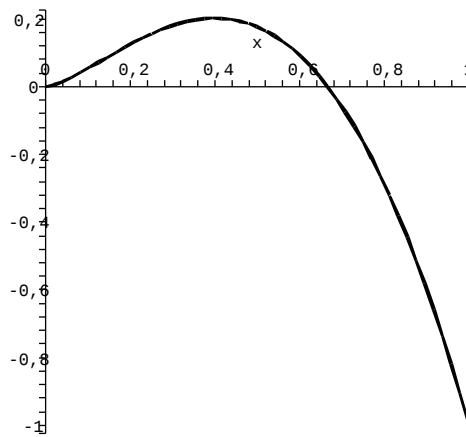
$$g(0) = 2 \cdot 0\sqrt{0} - 3 \cdot 0^2\sqrt{0} = 0$$

$$g(2/5) = 2 \cdot \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{5}} - 3 \cdot \frac{2^2}{5^2} \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{20-12}{25} \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{8\sqrt{10}}{125} \approx 0,20$$

och

$$g(1) = 2 \cdot 1\sqrt{1} - 3 \cdot 1^2\sqrt{1} = 2 - 3 = -1.$$

Funktionen är växande från $x = 0$ till $x = 2/5$, där den har sitt maximum, $8\sqrt{10}/125$, för att sedan vara avtagande mellan $x = 2/5$ till $x = 1$ där funktionen har sitt minimum, -1 . Förutom $x = 0$ har funktionen ett nollställe vid $x = 2/3$. Grafen för funktionen ser ut som



c) Derivatan $h'(x)$ ges enligt produktregeln och kedjeregeln av

$$h'(x) = -ae^{-at} \sin(\omega t) + e^{-at} \omega \cos(\omega t) = e^{-at} (\omega \cos(\omega t) - a \sin(\omega t)).$$

För att använda Newton-Raphsons metod för att lösa ekvationen $h'(t) = 0$ numeriskt, behöver vi derivatan av $h'(t)$, dvs

$$\begin{aligned} h''(t) &= -ae^{-at} (\omega \cos(\omega t) - a \sin(\omega t)) + e^{-at} (-\omega^2 \sin(\omega t) - a\omega \sin(\omega t)) \\ &= e^{-at} ((a^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2a\omega \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Newton-Raphsons metod ger att en bättre gissning än $t_0 = \pi/2\omega$ ges av

$$t_1 = t_0 - \frac{h'(t_0)}{h''(t_0)}$$

I vårt fall, när $t_0 = \pi/2\omega$ har vi att $\sin(\omega t_0) = \sin(\pi/2) = 1$ och $\cos(\omega t_0) = \cos(\pi/2) = 0$, vilket ger

$$h'(t_0) = e^{-a\pi/2} (\omega \cdot 0 - a \cdot 1) = -ae^{-a\pi/2}$$

och

$$h''(t_0) = e^{-a\pi/2}((a^2 - \omega^2) \cdot 1 - 2a\omega \cdot 0) = (a^2 - \omega^2)e^{-a\pi/2}$$

Alltså får vi

$$t_1 = t_0 - \frac{h'(t_0)}{h''(t_0)} = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{-ae^{-a\pi/2}}{(a^2 - \omega^2)e^{-a\pi/2}} = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{a}{a^2 - \omega^2}.$$

Svar:

a) $f'(x) = -e^{-\sqrt{x}}(\cos x/(2\sqrt{x}) + \sin x).$

b) Maximum är $g(2/5) = 8\sqrt{10}/125$ och minimum är $g(1) = -1.$

c) Den förbättrade gissningen är $t_1 = \pi/(2\omega) + a/(a^2 - \omega^2).$

4. a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = 2x^2 + x - 5$ och $y = x^2 + x - 1$ på intervallet $0 \leq x \leq 3.$ (3)

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) dx. \quad (2)$$

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas när kurvan

$$y = \sqrt{x} \cos x$$

roterar kring x -axeln på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi.$ (*Ledning:* Använd partiell integration och formeln för cosinus av dubbla vinkeln.) (4)

Lösning: a) Vi letar först efter skärningspunkter mellan kurvorna för att avgöra vilken av kurvorna som ligger över och vilken som ligger under. Ekvationen

$$2x^2 + x - 5 = x^2 + x - 1$$

kan skrivas om som

$$x^2 - 4 = 0$$

genom att flytta alla termer till vänsterledet. Därmed är skärningspunkterna $x = \pm 2.$ Eftersom bara en av dem ligger i intervallet räcker det att dela in området i två delar. För $0 \leq x \leq 2$ är $x^2 + x - 1 \geq 2x^2 + x - 5$ och för $2 \leq x \leq 3$ är $2x^2 + x - 5 \geq x^2 + x - 1.$ Alltså får vi de två bidragen

$$A_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - 4 \cdot 0 + \frac{0^3}{3} = \frac{16}{3}$$

och

$$A_1 = \int_2^3 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3 - \frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 = \frac{27 - 36 - 8 + 24}{3} = \frac{7}{3}$$

och den sammanlagda arean är

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$$

b) Vi har att $(-\cos 2x)/2$ är en primitiv funktion till $\sin 2x$ eftersom derivatan av $\cos 2x$ är $-2 \sin 2x$. Vi har på samma sätt att $(\sin 3x)/3$ är en primitiv funktion till $\cos 3x$. Alltså kan vi beräkna integralen genom

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) dx &= \left[\frac{-\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \left(-\frac{\cos \pi}{2} - \frac{\sin(3\pi/2)}{3} \right) - \left(-\frac{\cos 0}{2} - \frac{\sin(0)}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{0}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

c) Vi har att rotationskroppens volym ges av integralen

$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{x})^2 \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} x \cos^2 x dx$$

För att beräkna denna använder vi oss av formeln för cosinus av dubbla vinkeln, som säger att $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, vilket ger att $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ och

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \frac{x}{2} (1 + \cos 2x) dx = \pi \left[\frac{x}{2} \frac{2x + \sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} - \pi \int_0^{\pi} \frac{2x + \sin 2x}{4} dx \\ &= \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\pi + 0}{2} - \pi \cdot \frac{0}{2} \cdot \frac{0}{2} - \pi \left[\frac{2x^2 - \cos 2x}{8} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{2} - \pi \frac{2\pi^2 - 1}{8} + \pi \frac{2 \cdot 0^2 - 1}{8} = \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

Svar:

- a) Arean mellan kurvorna är $23/3$ areaenheter.
- b) $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) dx = 4/3$.
- c) Volymen av rotationskroppen är $\pi^3/4$ volymsenheter.