

5B1134 Matematik och modeller
Lösningsförslag till tentamen
den 13 januari 2006

1. a) Bestäm sidlängderna i en triangel med vinklarna 44° , 63° och 73° om arean av triangeln är 64 cm^2 . Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. (5)
- b) Härled areasatsen och sinussatsen. (4)

Lösning: a) Vi kan använda areasatsen för att skriva triangelns area som

$$T = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

och med sinussatsen får vi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Vi kan därmed ersätta a och b med $c \sin \alpha / \sin \gamma$, respektive $c \sin \beta / \sin \gamma$ i areasatsen och får då

$$T = \frac{1}{2} \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} \sin \gamma = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}.$$

Vi löser ut c^2 och får

$$c^2 = \frac{2T \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \approx \frac{2 \cdot 64 \cdot 0,956}{0,695 \cdot 0,891} \approx 198 \text{ cm}^2$$

och därmed $c \approx 14$. På samma sätt får vi

$$b^2 = \frac{2T \sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma} \approx \frac{2 \cdot 64 \cdot 0,891}{0,695 \cdot 0,956} \approx 172 \text{ cm}^2$$

vilket ger $b \approx 13 \text{ cm}$. Slutligen får vi

$$a^2 = \frac{2T \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \approx \frac{2 \cdot 64 \cdot 0,695}{0,891 \cdot 0,956} \approx 104 \text{ cm}^2$$

och $a \approx 10 \text{ cm}$.

b) Vi börjar med areasatsen. Arean av en triangel ges av basen gånger höjden genom två. Genom att dra en höjd mot sidan c i triangeln ABC ser vi att den delar in triangeln i två rätvinkliga trianglar. Den ena har hypotenusan a och vinkeln β , vilket ger att höjden mot sidan c är $a \sin \beta$. Triangelns area måste nu vara

$$T = \frac{1}{2}c \cdot a \sin \beta = \frac{1}{2}ac \sin \beta.$$

Vi kan på samma sätt få

$$T = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

och

$$T = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

genom att dra höjderna mot a respektive b . Därmed har vi härlett areasatsen. Genom att använda de tre olika uttrycken för arean får vi att

$$\frac{2T}{abc} = \frac{ac \sin \beta}{abc} = \frac{ab \sin \gamma}{abc} = \frac{bc \sin \alpha}{abc}$$

vilket efter förkortning ger

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \alpha}{a}.$$

Därmed har vi också härlett sinussatsen.

Svar:

- a) Sidlängderna är 10 cm, 13 cm och 14 cm, med två gällande siffrors noggrannhet.
2. a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos(2x + \pi/3) = 0,62$$

i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

b) Skriv om uttrycket $4 \sin x + 3 \cos x$ på formen $A \cos(x + \phi)$. **(3)**

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 x + \sin 2x = 1.$$

(3)

Lösning: a) Vi börjar med att se att $\cos t$ antar värdet 0,62 för $t = \pm 0,90$. Resterande lösningar fås genom att lägga på multipler av perioden. Vi har alltså att

$$2x + \pi/3 = \pm 0,90 + 2\pi n$$

och vi kan lösa ut x som

$$x = -\pi/6 \pm 0,45 + n\pi$$

där n är något heltal. Vi får att

$$x = -0,97 + n\pi$$

eller

$$x = -0,074 + n\pi.$$

För att lösningarna skall ligga i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ krävs i båda fallen att $n = 1$ eller $n = 2$. Vi får alltså fyra lösningar i intervallet

$$\begin{aligned}x &= -\pi/6 - 0,45 + \pi \approx 2,17, \\x &= -\pi/6 - 0,45 + 2\pi \approx 5,31, \\x &= -\pi/6 + 0,45 + \pi \approx 3,07 \\x &= -\pi/6 + 0,45 + 2\pi \approx 6,21.\end{aligned}$$

b) Vi skriver om $A \cos(x + \phi)$ med hjälp av additionssatsen för cosinus och får

$$A \cos(x + \phi) = A \cos x \cos \phi - A \sin x \sin \phi.$$

Alltså vill vi att

$$\begin{cases} A \cos \phi = 3 \\ A \sin \phi = -4 \end{cases}$$

Genom att kvadrera och addera ekvationerna får vi

$$A^2 = A^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 3^2 + (-4)^2 = 25$$

dvs $A^2 = 25$. Vi kan därför välja $A = 5$. Vi kan sedan få ϕ genom $\tan \phi = \sin \phi / \cos \phi = -4/3$, dvs $\phi = -\arctan 4/3 \approx -0,927$.

c) Vi kan skriva om ekvationen med hjälp av trigonometriska ettan och får då

$$\sin^2 x + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

dvs

$$\sin 2x = \cos^2 x.$$

Med hjälp av formeln för sinus av dubbla vinkeln kan vi nu skriva detta som

$$2 \sin x \cos x = \cos^2 x.$$

Vi får lösningar när $\cos x = 0$ eller när $2 \sin x = \cos x$. Det första händer vid $x = \pi/2 + n\pi$, för heltal n . Det andra händer när $\tan x = 1/2$, dvs vid $\arctan(1/2) + n\pi$.

Svar:

- a) Lösningarna är $x = 2,17$, $x = 3,07$, $x = 5,31$ och $x = 6,21$, med tre gällande siffrors noggrannhet.
- b) $4 \sin x + 3 \cos x = 5 \cos(x + \phi)$, där $\phi = -\arctan(4/3) \approx -0,927$.
- c) Lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$ och $x = \arctan(1/2) + n\pi$, där n är ett odtyckligt heltal.

3. a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = (1 + \sin^2 x)(2 + \cos^2 x)$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. Förenkla uttrycket så långt det går (4)

- b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (5)

Lösning: a) Vi kan börja med att derivera $\sin^2 x$ och $\cos^2 x$ med hjälp av produktregeln och får då

$$(\sin^2 x)' = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

och

$$(\cos^2 x)' = -\sin x \cos x + \cos x(-\sin x) = -2 \sin x \cos x$$

Med hjälp av produktregeln får vi nu för hela uttrycket att

$$\begin{aligned} f'(x) &= (0 + 2 \sin x \cos x)(2 + \cos^2 x) + (1 + \sin^2 x)(0 - 2 \sin x \cos x) \\ &= 4 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos^3 x - 2 \sin x \cos x - 2 \sin^3 x \cos x \\ &= 2 \sin x \cos x(2 + \cos^2 x - 1 - \sin^2 x) \\ &= 4 \sin x \cos^3 x \end{aligned}$$

där vi använt trigonometiska ettan för att skriva

$$1 + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x.$$

b) För att hitta eventuella lokala extrempunkter ser vi på derivatans nollställen. Vi använder kvotregeln för att derivera $g(x)$ och får

$$g'(x) = \frac{(2x + 0)(x + 1) - (x^2 + 1)(1 + 0)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}.$$

Eftersom nämnaren är nollskild i intervallet är funktionen deriverbar i hela intervallet och derivatans nollställen ges av rötterna till

$$x^2 + 2x - 1 = 0,$$

dvs $x = -1 \pm \sqrt{1^2 + 1} = -1 \pm \sqrt{2}$. Endast den större av dessa ligger i intervallet. Vi jämför funktionens värde i extrempunkten med funktionens värden i ändpunkterna. Vi har att

$$f(0) = \frac{0^2 + 1}{0 + 1} = 1,$$

$$f(\sqrt{2}-1) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2 + 1}{\sqrt{2}-1+1} = \frac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2$$

och

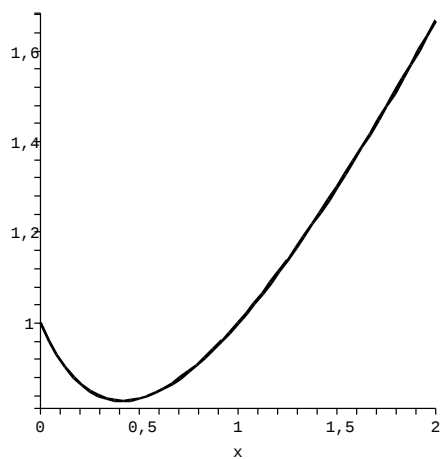
$$f(2) = \frac{2^2+1}{2+1} = \frac{5}{3}.$$

Vi ser att

$$2\sqrt{2}-2 < 1 < \frac{5}{3}$$

eftersom $2\sqrt{2} < 3$. Alltså ges funktionens minimum av $f(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}-2$ och dess maximum av $f(2) = 5/3$.

Grafen till funktionen kommer därmed att se ut som



Svar:

a) $f'(x) = 4 \sin x \cos^3 x.$

- b) Maximum är $f(2) = 5/3 \approx 1,67$ och minimum $f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,83$.
4. a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = \sin x$ och $y = \sin^2 x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (Ledning: $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.) (3)
- b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx.$$

med hjälp av partiell integration. (3)

- c) Använd trapetsmetoden med tre delintervall för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx$$

(3)

Lösning: a) Vi kontrollerar först vilken av kurvorna som ligger högst och om de skär varandra. Skärningarna sker när $\sin x = \sin^2 x$, dvs när $\sin x = 0$ eller $\sin x = 1$. I vårt intervall inträffar detta vid $x = 0$, $x = \pi/2$ och $x = \pi$. Det är dock hela tiden $\sin^2 x$ som ligger underst, eftersom $y^2 \leq y$ om $0 \leq y \leq 1$. Vi har alltså att arean av området ges av

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\sin x - \sin^2 x) \, dx &= \int_0^{\pi} \left(\sin x - \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \left[-\cos x - \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} \\ &= \left(-(-1) - \frac{\pi}{2} + \frac{0}{4} \right) - \left(-1 - \frac{0}{2} + \frac{0}{4} \right) = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- b) Vi använder partiell integration genom att derivera x^2 och integrera $\sin x$. På så sätt får vi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx &= [x^2(-\cos x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x(-\cos x) \, dx \\ &= (\pi/2)^2 \cdot 0 - 0^2 \cdot (-1) + \int_0^{\pi/2} 2x \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Vi använder partiell integration på den senare integralen och får

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} 2x \cos x \, dx &= [2x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2 \sin x \, dx \\ &= 2(\pi/2) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - [2(-\cos x)]_0^{\pi/2} \\ &= \pi - 2 \cdot (-0) + 2 \cdot (-1) = \pi - 2. \end{aligned}$$

c) Enligt trapetsmetoden skall vi approximera integralen med arean av tre parallell-trapetser. Dessa har areorna

$$\frac{\pi}{12} \left(0^2 \sin 0 + \frac{\pi^2}{6^2} \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi^2}{72} \right)$$

$$\frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi^2}{6^2} \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{3^2} \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18} \right)$$

och

$$\frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi^2}{3^2} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{2^2} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18} + \frac{\pi^2}{4} \right)$$

Summerar vi dessa tre bidrag får vi

$$\frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi^2}{36} + \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18} + \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{\pi}{12} \left(\frac{5\pi^2 + 2\pi^2 \sqrt{3}}{18} \right) = \frac{(5 + 2\sqrt{3})\pi^3}{216} \approx 1,2.$$

Svar:

- a) Arean mellan graferna är $2 - \pi/2$ areaenheter.
- b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = \pi - 2$.
- c) En approximation med tre delintervall ger 1,2.