

5B1134 Matematik och modeller

5 september 2005

1 Första veckan — Geometri med trigonometri

Veckans begrepp

- cirkel, cirkelsegment, sektor, korda
- båglängd, vinkel, grader, radianer
- sinus, cosinus, tangens
- areasatsen, sinussatsen, cosinussatsen

Frågor att besvara

- Vad är en linje, en cirkel, en sektor, ett segment och en korda?
- Hur kan vi skriva en ekvation för en cirkel?
- Vad är en vinkel och hur jämför man vinklar?
- Hur bestämmer man arean av en cirkelsektor eller ett cirkelsegment?
- Hur kan vi definiera sinus, cosinus och tangens med hjälp av rätvinkliga trianglar eller enhetscirkeln?
- Hur får vi reda på vinkeln om vi känner till sinus eller cosinus för vinkeln? Behöver vi veta något mer?
- Hur bestämmer man en sidlängd eller en vinkel i en triangel om man vet två sidlängder och en vinkel, en sidlängd och två vinklar eller tre sidlängder?

Problem att arbeta med

Här följer en uppsättning uppgifter som har med första veckans material att göra. Några av uppgifterna är svåra, eller mycket svåra, och det är inte tänkt att man skall kunna lösa uppgifterna på egen hand. Det är i stället meningen att studenterna med hjälp av varandra och läraren skall kunna arbeta med problemen och på det viset lära sig något om geometri och trigonometri.

Övning 1.1 Bestäm längden av kordan som ges av skärningen mellan linjen $x + y = 1/2$ och enhetscirkeln.

Övning 1.2 Betrakta de punkter (x, y) som uppfyller olikheterna

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq 1. \end{cases}$$

- Rita upp området och avgör vad det är för typ av område.
- Bestäm arean av området.
- Ersätt den andra olikheten med $x + y \geq 2$ och bestäm arean av området.
- Ersätt den andra olikheten med $y \geq c$ och bestäm hur arean av området, A , beror på c . Skissera grafen för $A(c)$.

Övning 1.3 Betrakta området i planet som beskrivs av olikheterna

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ x \geq 0, \\ y \geq x. \end{cases}$$

- Rita upp området och visa att det är en sektor.
- Bestäm öppningsvinkeln, arean och båglängden för sektorn.
- Hur varierar arean av sektorn med c om den sista olikheten ersätts med $y \geq cx$?

Övning 1.4 En triangel har två sidor av längd a och en sida av längd b . Uttryck sinus och cosinus för alla vinklar i triangeln med hjälp av a och b . Förenkla uttrycken så långt som möjligt. Vad händer om vi skriver $a = m^2 + n^2$ och $b = 4mn$?

Övning 1.5 En tetraeder är en tredimensionell kropp med fyra triangelformade sidor. I en regelbunden tetraeder är alla fyra sidor liksidiga trianglar och tyngdpunkten i tetraedern har då samma avstånd till alla fyra hörn.

- Hur långt är det avståndet i förhållande till kanternas längd?
- Om man står i tyngdpunkten och ser mot två olika hörn. Vilken är då vinkeln mellan dessa?

- Hur långa skall tetraedernas sidor vara för att den skall rymma en liter?

Övning 1.6 Longitud och latitud ger koordinater på jordytan som kan tänkas som en sfär med omkretsen 40000km vid ekvatorn. Hur stort är avståndet mellan Stockholm och Göteborg? Koordinaterna är $(59, 2^\circ N, 17, 6^\circ O)$ respektive $(57, 4^\circ N, 12, 2^\circ O)$.

Övning 1.7 En triangelformad plåtbit med måtten 15 cm, 20cm och 30cm hålls upp mot solen som lyser klar över Stockholm. Det är mitt på dagen på midsommarafton.

- Hur stor kan arean av skuggan av plåtbiten på marken bli?
- Hur stor kan den bli tre timmar senare?

(Jordaxelns lutning är $c:a$ 23° .)

Övning 1.8 Bestäm ett uttryck för arean av en triangel med hörn i punkterna (a_1, b_1) , (a_2, b_2) och (a_3, b_3) .

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina.

Övning 1.9 [5B1134:Modell:1] Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ och $C = (5, 1)$.

- Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. **(4)**
- Avgör vilken av vinklarna som är störst. **(2)**
- Låt C röra sig efter linjen $x = 5$ och bestäm ett villkor på C för att vinkeln B skall vara den största i triangeln. **(3)**

Övning 1.10 [5B1134:KS:1:2003] Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$ och $C = (5, 1)$.

- Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen. (Ledning: För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.) **(4)**
- En av vinklarna är nästan precis 60° . Vilken är det, och är den större eller mindre än 60° ? **(2)**
- Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna $y = kx$ och $y = \ell x$, där $k \geq 0$ och $\ell \geq 0$. **(3)**

Övning 1.11 [5B1134:Tentamen:031013:1]

- a) I en triangel ABC är sidan $c = |AB| = 5,1$ cm och sidan $a = |BC| = 6,7$ cm. Vinkeln vid A är $\alpha = 68^\circ$. Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsatserna. (4)
- b) Två cirklar skär varandra i två punkter som ligger på avstånd $\sqrt{2}$ från varandra. Cirk-larnas radier är 1 respektive $\sqrt{2}$. Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirk-larna. (5)

Övning 1.12 [5B1134:Tentamen:031103:1]

- a) En triangel har sidlängderna 4 cm, 5 cm och 6 cm. Bestäm samtliga vinklar och arean av triangeln. (5)
- b) Vi får en rundad triangel från en liksidig triangel genom att sätta dit cirkelbågar med centrum i ett av hörnen och som går genom de andra två hörnen. Bestäm förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area? (4)

Övning 1.13 [5B1134:Tentamen:040109:1]

- a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 11 cm, 13 cm och 17 cm. (4)
- b) Hur stor del av en cirkels yta utgörs av en regelbunden sexhörning som har sina hörn på cirkelns rand? (3)
- c) Hur lång omkrets har en regelbunden n -hörning i förhållande till den cirkel dess hörn ligger på? (2)

Övning 1.14 [5B1134:Tentamen:040821:1] I triangeln ABC har sidan AB längd 7, sidan BC längd 5 och $\cos B = 1/7$.

- a) Bestäm exakta värden för längden av den tredje sidan och cosinus för de båda övriga vinklarna. (5)
- b) Låt S vara centrum för en cirkel med som har alla triangelns hörn på periferin. Vi vet nu att vinkeln ASB är dubbelt så stor som vinkeln C enligt en känd sats. Enligt satsen för cosinus av dubbla vinkeln är $\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1$. Använd detta för att bestämma cirkelns radie. (4)

Övning 1.15 [5B1134:Tentamen:041011:1] Två av sidlängderna i en triangel är 8 m och 13 m. En av vinklarna är 60° .

- a) Bestäm alla möjliga värden för den tredje sidans längd. (4)
- b) Hur stor kan triangelns area maximalt vara? (3)

- c) I en rätvinklig triangel delar en linje den räta vinkeln i två vinklar som är 30° , respektive 60° . Linjen delar hypotenusan i två längder som är 8 cm respektive 2 cm. Hur långa är kateterna i triangeln? (2)

Övning 1.16 [5B1134:Tentamen:041030:1] I triangeln ABC är vinklarna $A = 42^\circ$, $B = 63^\circ$ och $C = 75^\circ$.

- a) Bestäm hur långa de övriga sidor är ifall den kortaste sidan har längd 15 m. Ange sidlängderna med två gällande siffrors noggrannhet. (3)
- b) Bestäm alla tre sidlängder med två gällande siffrors noggrannhet ifall arean av triangeln är 1000 m^2 . (4)
- c) Härled cosinussatsen med hjälp av Pythagoras sats genom att dra en höjd mot en av sidorna. (2)

Övning 1.17 [5B1134:Tentamen:050112:1]

- a) I en triangel är två av sidlängderna 7 respektive 8 längdenheter och vinkeln mellan dessa sidor är 120° . Bestäm den tredje sidans längd och triangelns area. (3)
- b) Bestäm sidlängderna i en triangel där vinklarna är 34° , 57° och 89° och triangelns area är 44 cm^2 . Ange svaren med två värdesiffror. (3)
- c) Två tangenter till en cirkel med radie r möts vid en vinkel av 45° . Hur stor är arean av det område som ligger mellan tangenterna och cirkeln? (3)

Övning 1.18 [5B1134:Tentamen:050829:1]

- a) Om två av sidorna i en triangel är 5 meter respektive 6 meter. Vilka längder på den tredje sidans längd ger upphov till en triangel med en area på minst 9 kvadratmeter. (5)
- b) Jämför arean av en regelbunden oktagon med sida $1/\sqrt{2}$ med en regelbunden hexagon med sida 1. Vilken är störst? (4)