5B1134 Matematik och modeller

12 september 2005

2 Andra veckan — Trigonometri

Veckans begrepp

- enhetscirkeln, trigonometriska ettan
- trigonometrisk funktion, sinuskurva
- period, fasförskjutning, vinkelhastighet
- trigonometrisk ekvation
- additionssatserna, formler för dubbla och halva vinkeln.

Frågor att besvara

- Hur definieras de trigonometriska funktionerna?
- Hur beräknas de trigonometriska funktionerna?
- Vilka grundläggande egenskaper har de och hur härleder man andra egenskaper från dem?
- Vad är en trigonometrisk ekvation och vilka typer av trigonometriska ekvatoiner kan vi lösa?

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 2.1 [5B1134:Modell:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\tan(3\pi x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(4)

b) *I en triangel är cosinus för två av vinklarna* $1/4$*, respektive* $1/2$*. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln.* **(3)**

c) *Om* $\cos\alpha = 1/4$ *och* $\cos\beta = x$*, vad är det då för villkor på* x *för att triangeln har två vinklar som är lika?* **(2)**

Övning 2.2 [5B1134:KS:2:2003]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$. **(4)**

b) *Skriv om* $5\sin\omega t - 12\cos\omega t$ *på formen* $A\sin(\omega t + \phi)$. **(3)**

c) *Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen*

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + c$$

där a, b *och* c *är reella konstanter.* **(2)**

Övning 2.3 [5B1134:Tentamen:031013:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin 4x = \cos 5x.$$

(3)

b) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4)

c) *Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för* $\sin\pi/12$. **(2)**

Övning 2.4 [5B1134:Tentamen:031103:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\tan 2x = \sqrt{3}.$$

(3)

b) *För att bestämma extremvärdena för funktionen* $f(x) = \sin 2x \cos x$ *leds man till att finna nollställena till derivatan* $g(x) = f'(x) = 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$*. Förenkla uttrycket för* $g(x)$ *och bestäm alla lösningar till den trigonometriska ekvationen* $g(x) = 0$. **(4)**

c) *Härled formeln*

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

med hjälp av någon av additionsformlerna. **(2)**

Övning 2.5 [5B1134:Tentamen:040109:2]

a) *Skriv om* $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ *på formen* $A\sin(x+\phi)$. **(3)**

b) *Använd resultatet från a) för att bestämma samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

(4)

c) *Härled, med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan, formeln för* $\sin(x/2)$ *uttryckt i* $\cos x$. **(2)**

Övning 2.6 [5B1134:Tentamen:040821:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen* **(4)**

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) *Använd additionsformlerna och trigonometriska ettan för att skriva om* $\sin 3x$ *som ett polynom i* $\sin x$ *och* $\cos 3x$ *som polynom i* $\cos x$. **(5)**

Övning 2.7 [5B1134:KS:1]

a) *Rita upp grafen för funktionen* $f(x) = 3,5\cos(4,4\,x)$ *i intervallet* $0 \le x \le 2\pi/3$ *och bestäm alla lösningar till ekvationen*

$$3,5\cos(4,4\,x) = 1,2$$

i samma intervall. Ange lösningarna med två värdesiffror. **(4)**

b) *Hur många lösningar har ekvationen*

$$\sin(\omega t + \phi) = 0,242$$

i intervallet 0 *ms* $\le t \le 94$ *ms, om* $\omega = 3,14 \cdot 10^2$ *radianer/s och* $\phi = -2\pi/3$? **(2)**

b) *Man kan skriva om $a\sin(\omega t) + b\sin(\omega t + 2\pi/3)$ på formen $A\sin(\omega t + \phi)$. Bestäm amplituden A uttryckt i a och b.* **(3)**

Övning 2.8 [5B1134:Tentamen:041011:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin\left(\frac{2x-\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3)

b) *Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen*

$$1,2\sin x + 1,4\cos x = 0,54$$

med två gällande siffrors noggrannhet. **(4)**

c) *Använd sinussatsen för att härleda additionssatsen för sinus i det fall då alla inblandade vinklar ligger mellan $0°$ och $180°$.* **(2)**

Övning 2.9 [5B1134:Tentamen:041030:2]

a) *Bestäm samtliga nollställen till funktionen*

$$f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

(3)

b) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin x + \sin 2x = 0.$$

(3)

c) *Vilket är det minsta positiva tal, x, där det inte spelar någon roll om man har miniräknaren inställd på radianer eller grader när man skall beräkna $\sin x$?* **(3)**

Övning 2.10 [5B1134:Tentamen:050112:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3)

b) *Bestäm ett närmevärde med två gällande siffror till den minsta positiva lösningen till ekvationen*

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$$

(4)

c) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

(2)

Övning 2.11 [5B1134:Tentamen:050829:2]

a) *Bestäm samtliga lösningar till ekvationen*

$$\tan(2t + \pi/5) = -\sqrt{3}$$

(4)

b) *Bestäm med två värdesiffrors noggrannhet konstanterna* A *och* ϕ *sådana att*

$$A\sin(x + \phi) = 5\sin x - 3\cos x.$$

(3)

c) *Skriv* $\cos 4x$ *som ett polynom i* $\cos x$. **(2)**

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

2.1 *a)* $x = 2/9 + n/3$, *där* n *är ett heltal.*

b) *Cosinus för den tredje vinkeln är* $(3\sqrt{5}-1)/8$.

c) $x = 1/4$ *eller* $x = \sqrt{6}/4$.

2.2 *a)* *Samtliga lösningar ges av* $t = \pm 1/150 + n/50$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) $5\sin\omega t - 12\cos\omega t = 13\sin(\omega t + \phi)$ *där* $\phi = \arctan(-12/5) \approx -1,18$.

c) *Det största värdet är* $c + \sqrt{a^2+b^2}$ *och det minsta är* $c - \sqrt{a^2+b^2}$.

2.3 *a)* *Lösningarna är* $x = \pi(1-4n)/18$ *och* $x = \pi(4n-1)/2$ *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) *Lösningarna är* $x = (-3 \pm 4)\pi/12 + 2\pi n$ *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

c) *Ett exakt värde är* $\sin(\pi/12) = (\sqrt{2-\sqrt{3}})/2$.

2.4 *a)* *Lösningarna är* $x = \pi/6 + n\pi/2$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) *Vi kan skriva* $g(x) = 2\cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x)$ *och lösningarna är* $x = \pi/2 + n\pi$, *och* $x = \pm\arctan(\sqrt{2}/2) + n\pi \approx \pm 0,62 + n\pi$ *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

2.5 *a)* $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x - \pi/3)$.

b) *Lösningarna är* $x = 7\pi/12 + 2\pi n$ *och* $x = 13\pi/12 + 2\pi n$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

c) $\sin(x/2) = \pm\sqrt{(1-\cos x)/2}$, *med positivt tecken om* $4\pi n \le x \le 4\pi n + 2\pi$ *för något heltal* n, *annars negativt.*

2.6 *a)* *Lösningarna är* $x = \pi/3 + 2\pi n/3$ *och* $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) *Vi får att* $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ *och* $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

2.7 *a)* *Lösningarna är* $x = 0,28$, $x = 1,2$ *och* $x = 1,7$.

b) *Det finns nio lösningar till ekvationen i intervallet.*

c) *Amplituden är* $A = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

2.8 *a)* *Lösningarna till ekvationen ges av* $x = 5\pi/2 + 3\pi n$ *och* $x = 3\pi n$, *där* n *är ett godtyckligt heltal. (*$150° + n \cdot 540°$ *och* $n \cdot 540°$*.)*

b) *Den minsta positiva lösningen ges av* $x \approx 2,0$.

2.9 *a)* *Lösningarna är* $x = 11\pi/36 + 2\pi n/3$ *och* $x = 19\pi/36 + 2\pi n/3$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) *Lösningarna är* $x = n\pi$, $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ *och* $x = 4\pi/3 + 2\pi n$ *där* n *är ett godtyckligt heltal. (Lösningen kan också skrivas som* $x = 2\pi n/3$ *och* $(2n+1)\pi$, *för godtyckligt* n*.)*

c) *Det minsta positiva tal som uppfyller kravet är* $x = 180\pi/(180+\pi)$.

2.10 *a)* *Lösningarna är* $23\pi/24 + 2\pi n/5$ *och* $29\pi/24 + 2\pi n/5$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) *Den minsta positiva lösningen är* $x \approx 1,35$. *(*$77,3°$*)*

c) *Lösningarna är* $n\pi/2$ *och* $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

2.11 *a)* *Lösningarna ges av* $x = -4\pi/15 + n\pi/2$, *där* n *är ett godtyckligt heltal.*

b) $A = \sqrt{34} \approx 5,8$.

c) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.