

5B1134 Matematik och modeller

25 september 2005

4 Fjärde veckan — Derivator med tillämpningar

Veckans begrepp

- optimering, extrempunkter, lokala maxima och minima
- Newton-Raphsons metod för numerisk ekvationslösning
- feluppskattning med hjälp av derivata
- primitiva funktioner

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 4.1 [5B1134:Modell:3] Låt $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vara den funktion som ges av $f(x) = (2 \cos x + 1)^4$, för alla reella tal x .

- a) Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera f . (3)
- b) Bestäm maximum och minimum för funktionen f på intervallet $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. (4)
- c) Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till $h = g^n$ då $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ är en given funktion och n är ett positivt heltal. (2)

Övning 4.2 [5B1134:KS:3:2003] Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

- a) Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av $f(x)$. Förenkla uttrycket så långt som möjligt. (3)
- b) Skissera grafen för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ och bestäm maximum och minimum av $f(x)$ på samma intervall. (4)

c) Funktionen $y = f(x)$ är lösningen till en differentialekvation

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Bestäm konstanterna a och b . (2)

Övning 4.3 [5B1134:Tentamen:031013:3] Betrakta funktionen $f(x) = \sin x + 2 \cos^2 x$.

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. (3)

b) Bestäm närmevärden till maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ med två gällande siffror. (4)

c) Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen $f(x)$. (2)

Övning 4.4 [5B1134:Tentamen:031103:3] Betrakta funktionen $f(x) = x(3 - x)e^{-x/2}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. (4)

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 10$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. (5)

Övning 4.5 [5B1134:Tentamen:040109:3] Betrakta funktionen $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. (4)

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. (5)

Övning 4.6 [5B1134:Tentamen:040821:3]

a) Derivera funktionen $f(x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x$. (Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används.) (2)

b) Derivera funktionen $g(x) = \cos 2x \sin 3x$. (2)

c) Bestäm ett värde på konstanten a så att funktionen $h(x) = e^{ax} \sin^2 x$ får ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$. (5)

Övning 4.7 [5B1134:Tentamen:041011:3]

a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

c) Härled derivatan av $\tan x$ direkt från definitionen av derivata. (Ledning: Använd att $(\sin x)/x$ går mot 1 när x går mot noll.) (2)

Övning 4.8 [5B1134:Tentamen:041030:3]

a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{2 + x}{5 + x^2}$$

på intervallet $-5 \leq x \leq 5$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. (4)

c) Visa direkt från definitionen av derivata att en exponentialfunktion, $h(x)$, uppfyller

$$h'(x) = h(x) \frac{h'(0)}{h(0)}$$

(2)

Övning 4.9 [5B1134:Tentamen:050112:3]

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x} \cos(x)}$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

b) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde till nollstället till funktionen $f(x) = \sin(x) + x - 1$. Utför två iterationer med startvärde $x = 0$ och ange nollstället med korrekt antal gällande siffror. (4)

c) Härled formeln för derivatan av en produkt av två deriverbara funktioner. (2)

Övning 4.10 [5B1134:Tentamen:050829:3]

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \ln x \sin^2 x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. (3)

b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{2x^2 + 8}{2x + 3}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 3$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. (4)

c) Om man behöver beräkna $\sqrt{57}$ med en miniräknare som saknar kvadratrotsfunktion kan man använda Newton-Raphsons metod. Använd den för att beräkna ett närmvärde med tre gällande siffrors noggrannhet utgående från startvärdet $x_0 = 7$. (2)

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

4.3 a) $f'(x) = -4 \sin x (\cos x + 1)^3$.

b) Maximum är 1 och minimum är 0.

c) Genom att se på nollställena till $g'(x)$ och $g(x)$, samt ändpunkterna på intervallet.

4.4 a) $f'(x) = 2e^{-x} \cos x$.

b) Maximum är $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} \approx 0,21$ och minimum är $f(0) = -1$.

c) Konstanterna ges av $a = b = 2$ och $y = f(x)$ är en lösning till $y'' + 2y' + 2y = 0$.

4.5 a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = \cos x - 4 \cos x \sin x$.

b) Maximum av $f(x)$ är 2,1 och minimum $-1,0$, på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.

c) De exakta värdena för maximum och minimum är $17/8$, respektive -1 .

4.6 a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (6 - 7x + x^2)e^{-x/2}/2$.

b) Maximum av $f(x)$ är $2e^{-1/2} \approx 1,2$ och minimum är $-18e^{-3} \approx -0,90$.

4.7 a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (2x^2 - 1)e^{2x}$.

b) Maximum av $f(x)$ är $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 0,29$ och minimum är $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -0,85$.

4.8 a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = -32 \cos^3 x \sin x + 16 \cos x \sin x$.

b) Derivatan av $g(x)$ är $g'(x) = -2 \sin 2x \sin 3x + 3 \cos 2x \cos 3x$.

c) Funktionen har ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$ om $a = -2\sqrt{3}$.

4.9 a) Derivatan är $f'(x) = 8/(e^{2x} + e^{-2x})^2$.

b) Det största värdet är $\sqrt{3}/3$ och det minsta är $-\sqrt{3}/3$.

c) Derivatan av $\tan(x)$ är $1/\cos^2(x)$.

4.10 a) Derivatan är $f'(x) = 2/(1 + \sin 2x)$.

b) Det största värdet är $1/2$ och det minsta värdet är $-1/10$.

4.11 a) Derivatan är $f'(x) = (2 \cos x + \sin x)/(2\sqrt{1 - e^{-2x} \cos x})$.

b) Nollstället är $x = 0,51$ med två gällande siffrors noggrannhet.

4.12 a) $f'(x) = (1/x) \sin^2 x + 2 \ln x \sin x \cos x$.

b) Maximum ges av $g(3) = 26/9$ och minimum av $g(1) = 2$.

c) $x = 7,55$ är en approximation av $\sqrt{57}$ med tre gällande siffror.