5B1134 Matematik och modeller

2 oktober 2005

5 Femte veckan — Integraler med tillämpningar

Veckans begrepp

- Primitiva funktioner, integraler, area
- Trapetsmetoden för numerisk integration
- Partiell integration
- Variabelbyte i integraler
- Rotationsvolymer

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 5.1 [5B1134:Modell:4]

a) *Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna* $f(x) = \cos x$ *och* $g(x) = 1/2$ *på intervallet* $[0, 2\pi]$. **(4)**

b) *Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen* $g(x) = 1/2$ *mot* $g(x) = \cos a$*, där* a *är en konstant med* $0 \leq a \leq \pi$. **(3)**

c) *Vilka värden på* a *ger den största, respektive minsta arean mellan graferna?* **(2)**

Övning 5.2 [5B1134:KS:4:2003]

a) *Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna* $f(x) = \cos x$ *och* $g(x) = \sin 2x$ *på intervallet* $0 \leq x \leq \pi/2$. **(4)**

b) *Kurvan* $y = x(1 - x)$ *på intervallet* $0 \leq x \leq 1$ *roterar kring* x*-axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp.* **(3)**

c) *När ett område ovanför x-axeln roteras kring x-axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som $2\pi r A$ där A är arean under grafen som roteras och r är avståndet från områdets tyngdpunkt till x-axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över x-axeln för det område som roteras i b).* **(2)**

Övning 5.3 [5B1134:Tentamen:031013:4]

a) *Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan $y = \sqrt{1-2x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$.* **(3)**

b) *Använd partiell integration för att beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

(4)

c) *Beräkna integralen*

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}dx$$

med hjälp av variabelbytet $t = 2 - x^2$. (Ledning: $2/3x\sqrt{x}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$.) **(2)**

Övning 5.4 [5B1134:Tentamen:031103:4]

a) *Beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi} |\sin x - \cos 2x|\, dx.$$

(4)

b) *Använd först variabelbytet $t = \ln x$ och sedan partiell integration för att beräkna integralen*

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$

(5)

Övning 5.5 [5B1134:Tentamen:040109:4]

a) *Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{2x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.* **(4)**

b) *Beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) *Använd en trapetsmetoden med fyra delintervall för att få en numerisk approximation av samma integral som i föregående deluppgift.* **(2)**

Övning 5.6 [5B1134:Tentamen:040821:4]

a) *Beräkna integralen*

$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$

där $f(x) = e^x - 1$ *för alla reella* x. **(3)**

b) *Beräkna integralen*

$$\int_0^1 (1 - x^2)e^x \, dx$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) *Låt* $g(t)$ *vara en periodisk funktion med period* T *och låt* a *vara en reell konstant. Visa att*

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at} f(t) dt = K \int_0^T e^{at} f(t) dt$$

för någon konstant K *och bestäm denna konstant.* **(3)**

Övning 5.7 [5B1134:KS:4]

a) *Polynomet* $p(x) = 1 - 2x^2$ *är en approximation av* $\cos 2x$ *som är bra för små värden på* x. *Beräkna integralerna*

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \qquad \text{och} \qquad \int_0^{\pi/4} p(x) \, dx$$

och jämför resultaten. Hur stort blir det fel man får genom att använda approximationen? **(4)**

b) *Bestäm hur stort felet blir när man använder trapetsmetoden med tre delintervall för att beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx.$$

(2)

c) *Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området under grafen för* $f(x) = \ln(x) + 1$ *roterar kring* x*-axeln på intervallet* $1 \leq x \leq e$. **(3)**

Övning 5.8 [5B1134:Tentamen:041011:4]

a) *Kurvorna* $y = e^{2x}$ *och* $y = e^{-2x}$ *avgränsar tillsammans med linjen* $x = \ln(2)$ *ett område i planet. Beräkna arean av detta område.* **(3)**

b) *Beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x} \, dx.$$

med hjälp av variabelbyte. **(3)**

c) *Bestäm det värde på konstanten a som minimerar*

$$\int_0^{\pi} (ax - \sin x)^2 \, dx.$$

(3)

Övning 5.9 [5B1134:Tentamen:041030:4]

a) *Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av parabeln $y = 4 - x^2$ och linjen $y = 1 + 2x$.* **(3)**

b) *Använd variabelbytet $x = \tan t$ för att beräkna integralen*

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \, dx.$$

(3)

c) *Beräkna arean mellan de två kurvorna $y = \sin(x + a)$ och $y = \sin(x + b)$ på ett intervall som ligger mellan två närstående skärningspunkter.* **(3)**

Övning 5.10 [5B1134:Tentamen:050112:4]

a) *Kurvan $f(x) = \sin(x)$ avgränsar tillsammans med dess tangenter i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område.* **(4)**

b) *Samma område roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas.* **(3)**

c) *Beräkna integralen*

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx$$

med hjälp av ett variabelbyte. **(2)**

Övning 5.11 [5B1134:Tentamen:050829:4]

a) *Använd en integral för att beräkna arean av området mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2x + 3$.* **(3)**

b) *Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \sin 2x$ genom att använda partiell integration.* **(3)**

c) *Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas när kurvan $y = \tan x$ roterar kring x-axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$.* **(3)**

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

5.1 *a) Arean mellan graferna är* $\pi/3+2\sqrt{3}$.

b) Uttrycket för arean är $(2\pi-4a)\cos a+4\sin a$.

c) Maximum är 2π *och minimum är* 4.

5.2 *a) Arean av området mellan graferna är* $1/2$.

b) Rotationskroppens volym är $\pi/30$.

c) Avståndet från områdets tyngdpunkt till x*-axeln är* $1/10$.

5.3 *a) Volymen är* $23\pi/24$.

b) $\int_0^{\pi} x^2\sin x dx=\pi^2-4$.

c) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}dx=2\sqrt{2}/3$.

5.4 *a)* $\int_0^{\pi}|\sin x-\cos 2x|dx=3\sqrt{3}-2$.

b) $\int_1^2(\ln x)^2dx=2(\ln 2)^2-4(\ln 2)+2\approx 0,19.$.

5.5 *a) Arean mellan kurvorna ges av* $(e^2+1)(e-1)^2/2e^2\approx 1,68$.

b) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=\pi$.

c) Trapetsmetoden ger $\pi^2(\sqrt{2}+1)/8\approx 2,98$.

5.6 *a)* $\int_0^2 f(x)^2dx=(e^4-4e^2+7)/2$.

b) $\int_0^1(1-x^2)e^x\,dx=1$.

c) Konstanten är $K=e^{anT}$.

5.7 *a) Integralernas värden blir* $1/2$*, respektive* $\pi(24-\pi^2)/96$ *och felet man får genom att använda approximationen är* $(24\pi-\pi^3-48)/96\approx -0,038$.

b) Felet man får genom att använda trapetsmetoden blir $(\pi(2+\sqrt{3})-12)/24\approx -0,011$.

c) Rotationskroppens volym är $V=\pi(2e-1)\approx 13,9$ *volymsenheter.*

5.8 *a) Arean av området är* $9/8$ *areaenheter.*

b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx=\ln(3)$

c) Värdet på a *som minimerar integralen är* $a=3/\pi^2$.

5.9 *a) Arean av området är* $32/3$ *areaenheter.*

b) Integralens värde är $\pi/4$.

c) Arean av området är $4|\sin((a-b)/2)|$ $(=2\sqrt{2-2\cos(a-b)})$.

5.10 *a) Arean är* $(\pi^2-8)/4$.

b) Volymen är $\pi^2(\pi^2-6)/12$.

c) $\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx=2-2\ln 2$.

5.11 *a) Arean mellan kurvorna är* $32/3$ *areaenheter.*

b) $(1/4-x^2/2)\cos 2x+(x/2)\sin 2x$ *är en primitiv funktion till* $x^2\sin 2x$.

c) Rotationsvolymen är $2\pi-\pi^2/2(\approx 1,35)$ *volymnsenheter.*