5B1134 Matematik och modeller
Om arean av sfäriska trianglar

6 september 2005

Eftersom det kom en fråga om hur man visar satsen om arean av sfäriska trianglar ger jag ett skissartat resonemang nedan. Det är inte så värst avancerat egentligen. Man utgår från tvåkanterna som bildas av två storcirklar. Där är det lätt att se att arean av sfären, som är $4\pi R^2$, delas i fyra delar vars area beror enbart på vinkeln som storcirklarna skär varandra i. Om vinkeln är α kommer två av delarna att ha area $2\alpha R^2$ och de andra två $2(\pi - \alpha)R^2 = 2\alpha' R^2$, där vi låter $\alpha' = \pi - \alpha$ beteckna komplementvinkeln.

I den sfäriska triangeln har vi tre vinklar, α, β och γ. De tre storcirklarna delar in sfären åtta sfäriska trianglar som är parvis lika. Vinklarna i fyra av dem ges av

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 2 & \alpha & \beta' & \gamma' \\ 3 & \alpha' & \beta & \gamma' \\ 4 & \alpha' & \beta' & \gamma \end{array}$$

Eftersom trianglarna två och två bildar tvåkanter, vet vi att

$$\begin{cases} T_1 + T_2 &= 2\alpha R^2 \\ T_1 + T_3 &= 2\beta R^2 \\ T_1 + T_4 &= 2\gamma R^2 \\ T_2 + T_3 &= 2\gamma' R^2 \\ T_2 + T_4 &= 2\beta' R^2 \\ T_3 + T_4 &= 2\alpha' R^2 \end{cases}$$

där T_1, T_2, T_3 respektive T_4 är trianglarnas area. Vi kan nu räkna ut T_1 genom exempelvis

$$\begin{aligned} 3T_1 &= (T_1 + T_2) + (T_1 + T_3) + (T_1 + T_4) - \frac{1}{2}(T_2 + T_3) - \frac{1}{2}(T_2 + T_4) - \frac{1}{2}(T_3 + T_4) \\ &= 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2 - (\gamma' + \beta' + \alpha')R^2 \\ &= 3(\alpha + \beta + \gamma)R^2 - 3\pi R^2 \end{aligned}$$

eller enklare genom

$$2T_1 = (T_1 + T_2) + (T_1 + T_3) - (T_2 + T_3) = 2\alpha R^2 + 2\beta R^2 - 2\gamma' R^2 = 2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$$

vilket i båda fallen ger $T_1 = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$.